

Folien zur

Einführung in die Festigkeitslehre



Das Lehrbuch zum Foliensatz:

Volker Läpple:
Einführung in die Festigkeitslehre
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016
ISBN 978-3-658-10610-2



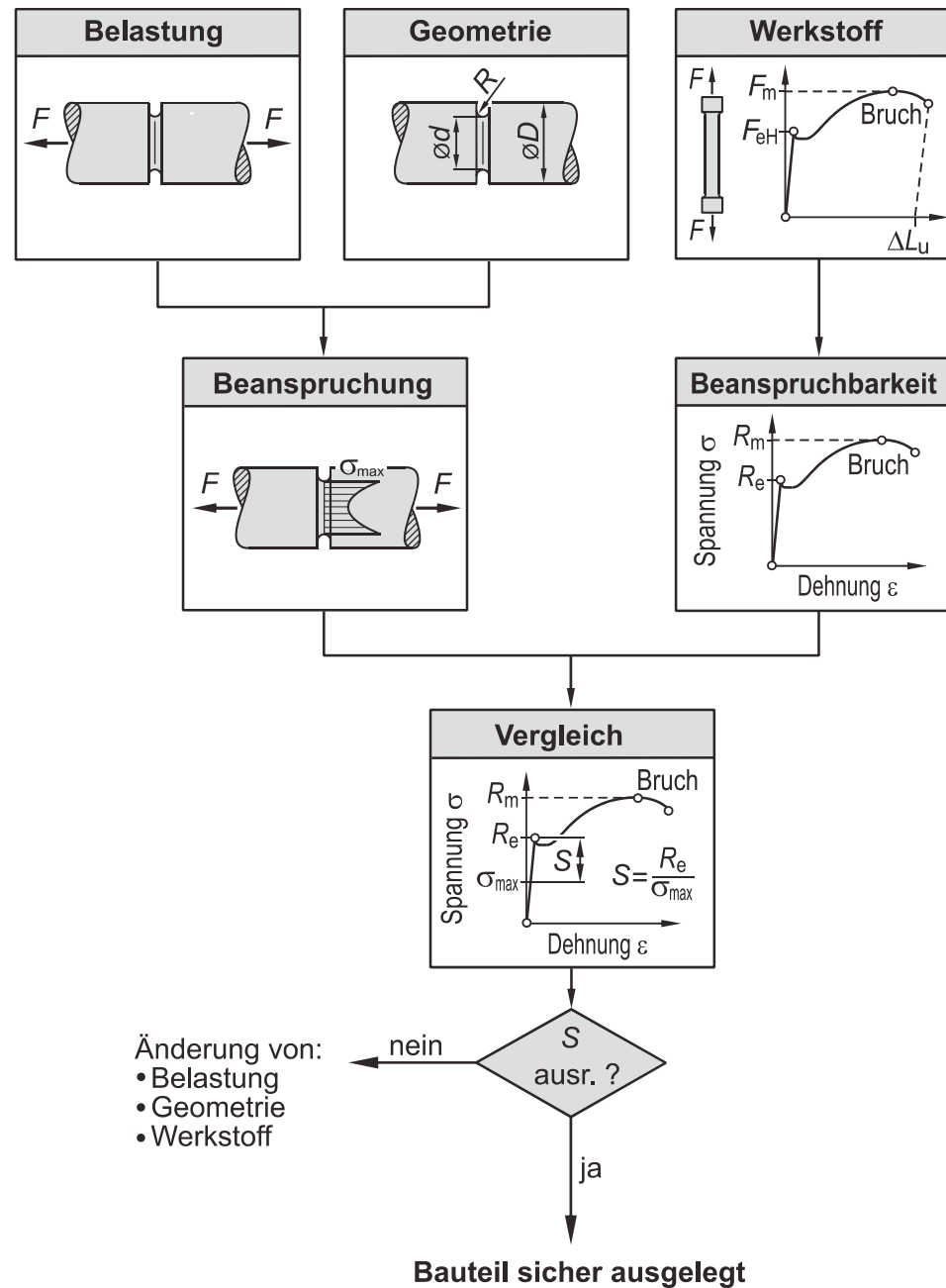
Das Lösungsbuch zu den Übungsaufgaben:

Volker Läpple:
Lösungsbuch zur Einführung in die
Festigkeitslehre
Vieweg-Verlag, 2. Auflage 2008
ISBN 978-3-8348-0452-5

Kapitel 1

Einleitung

Prinzip eines Festigkeitsnachweises



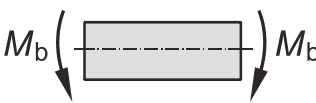
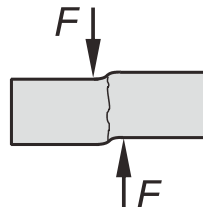

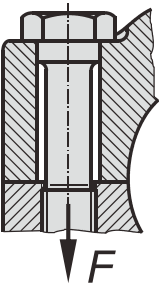
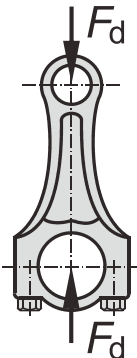
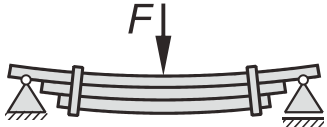
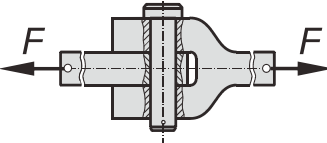
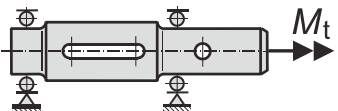


Kapitel 2

Grundbelastungsarten

Grundbelastungsarten

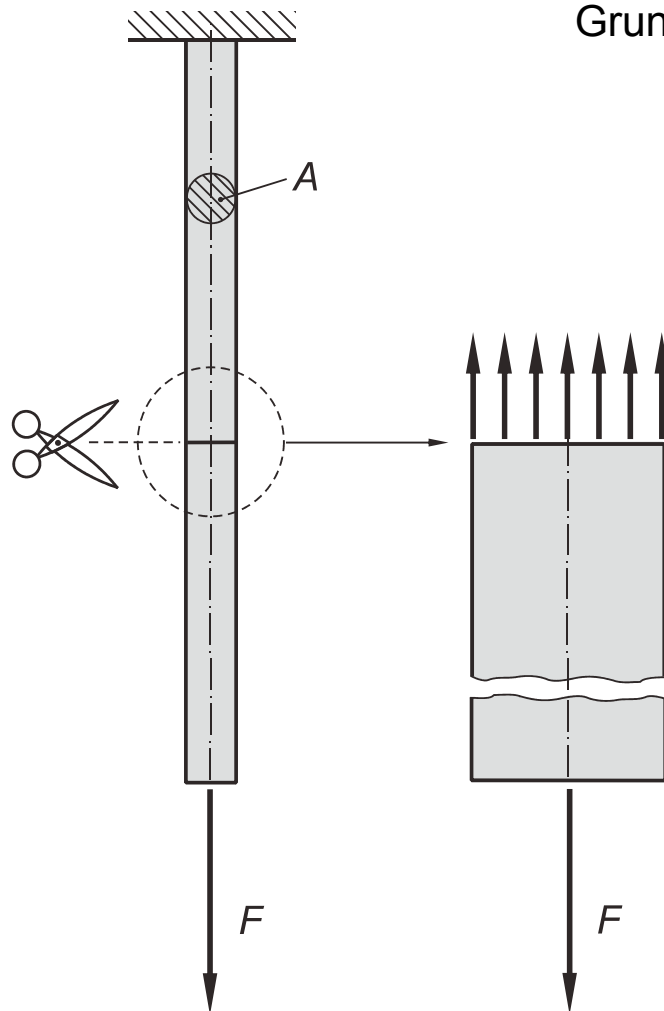
Übersicht der Grundbelastungsarten

Zug	Druck	Biegung	Schub	Torsion
				
<p>Beispiel: Dehnschraube</p> 	<p>Beispiel: Pleuel</p> 	<p>Beispiel: Blattfeder</p> 	<p>Beispiel: Gelenkbolzen- verbindung</p> 	<p>Beispiel: Antriebswelle</p> 

Grundbelastungsarten

Zug

Spannungsermittlung



Grundgleichung:

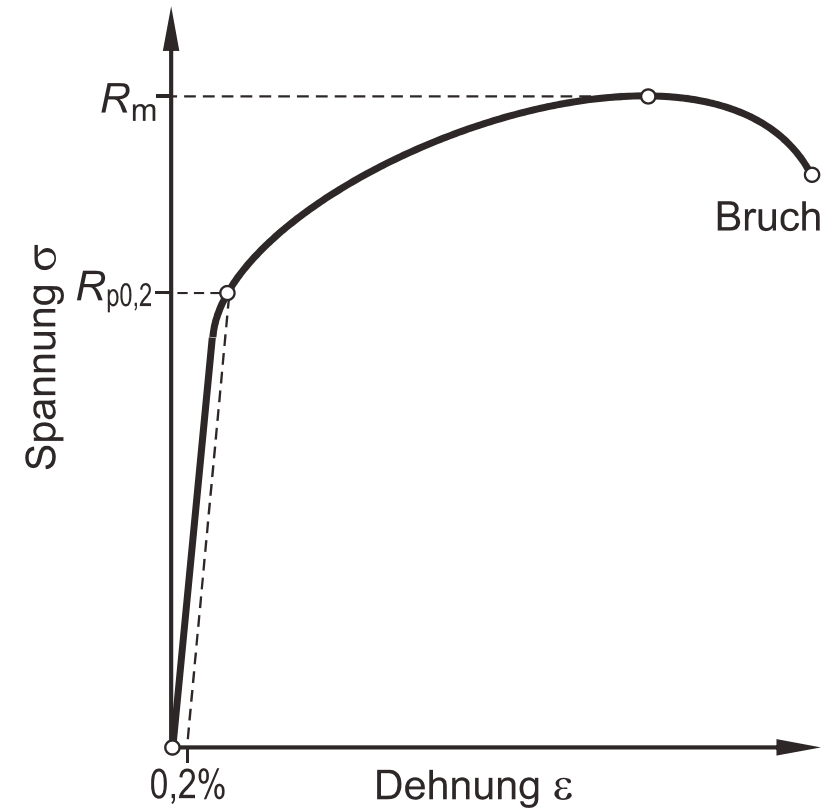
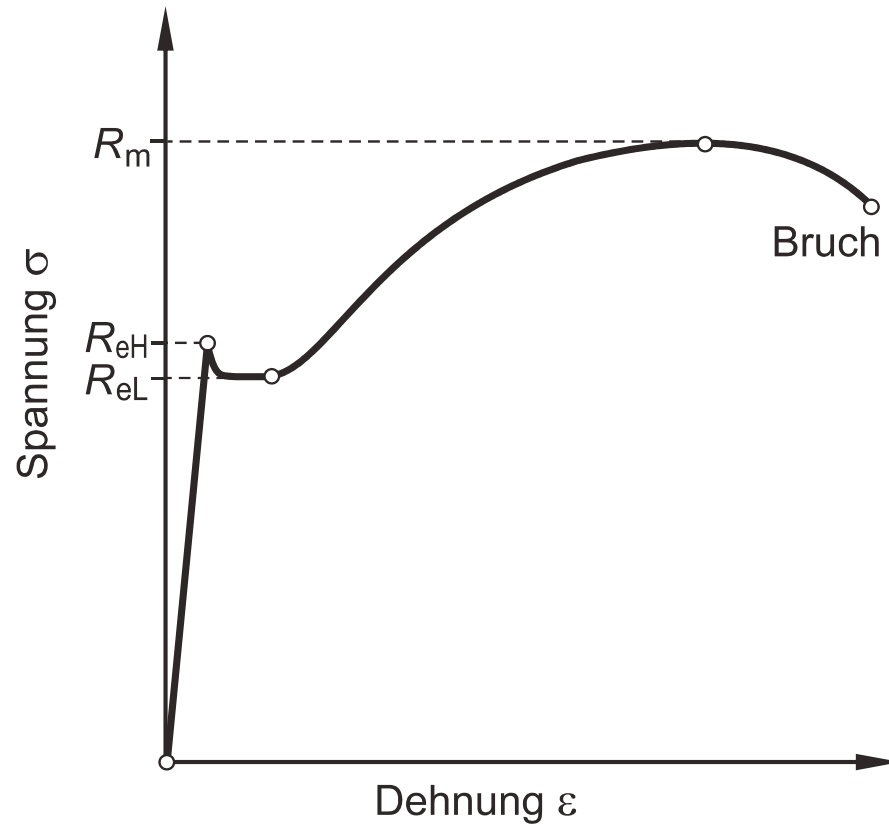
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- F (Zug-)Kraftkomponente senkrecht zur Schnittfläche (N)
- A Schnittfläche (mm^2)
- σ (Zug-)Normalspannung (N/mm^2)

Grundbelastungsarten

Werkstoffverhalten und Kennwerte

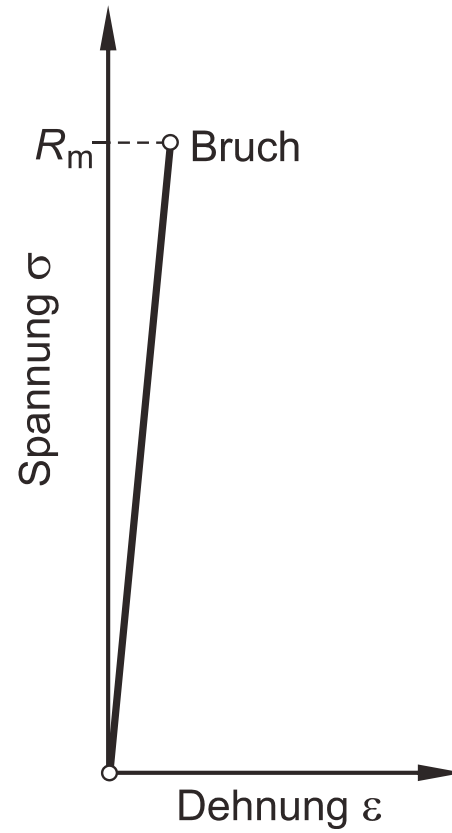
Duktile Werkstoffe



- Kennwerte:
- Streckgrenze (R_e) bzw. Dehngrenze ($R_{p0,2}$)
 - Zugfestigkeit (R_m)

Grundbelastungsarten

Spröde Werkstoffe



Kennwert: Bruch (R_m)

Grundbelastungsarten

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F}$ bzw. $\frac{R_p}{S_F}$ mit $S_F = 1,2 \dots 2,0$

- Bruch: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B}$ mit $S_B = 2,0 \dots 4,0$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte für σ_{zul} .

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Grundbelastungsarten

Formänderung durch einachsige Normalspannung

Hookesches Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Elastizitätsmoduln ausgewählter Werkstoffgruppen

Stähle und Stahlguss: $E = 200000 \dots 210000 \text{ N/mm}^2$
 Al und Al-Legierungen: $E = 60000 \dots 80000 \text{ N/mm}^2$
 Mg und Mg-Legierungen: $E = 40000 \dots 45000 \text{ N/mm}^2$

Poissonsches Gesetz

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l$$

Querkontraktionszahlen ausgewählter Werkstoffgruppen

Beton: $\mu \approx 0$
 Stähle und Stahlguss: $\mu = 0,30$
 Gusseisen mit Lamellengraphit: $\mu = 0,25 \dots 0,27$
 Al und Al-Legierungen: $\mu = 0,33$
 Mg und Mg-Legierungen: $\mu = 0,35$
 Kupfer: $\mu = 0,34$
 Zink: $\mu = 0,39$
 Elastomere: $\mu \approx 0,5$

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.3



Ein Wassertank ist an vier Stahlbändern aus S275JR befestigt (siehe Abbildung). Die Masse des leeren Tanks beträgt $m_L = 2000$ kg, die des gefüllten Tanks $m_V = 3600$ kg ($g = 9,81$ m/s²). Die Stahlbänder haben eine Querschnittsfläche von 25 mm x 4 mm. Der Abstand der Stahlbänder vom linken und rechten Ende des Tankes beträgt jeweils $a = 500$ mm.

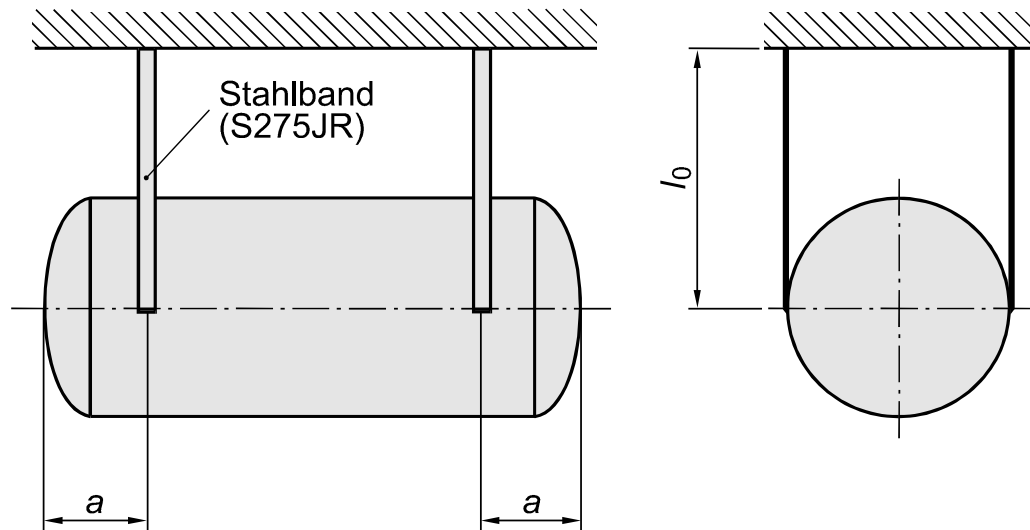
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 265 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 470 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie die Spannung in den Bändern bei leerem und bei vollem Tank.
- Ermitteln Sie bei vollem Wassertank die Sicherheiten der Bänder gegen Versagen. Sind die Sicherheiten ausreichend?
- Um welchen Betrag Δl senkt sich der Tank beim Befüllen, falls die Länge der Bänder bei leerem Tank $l_0 = 1,5$ m beträgt?

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.6



Die dargestellte gelenkig gelagerte Konstruktion soll durch ein Stahlseil aus einem Spannstahl gehalten werden. Das Stahlseil hat eine Querschnittsfläche von $A = 100 \text{ mm}^2$.

Ermitteln Sie die zulässige Belastung F , falls die Verlängerung des Stahlseils auf 0,5 mm begrenzt werden muss.

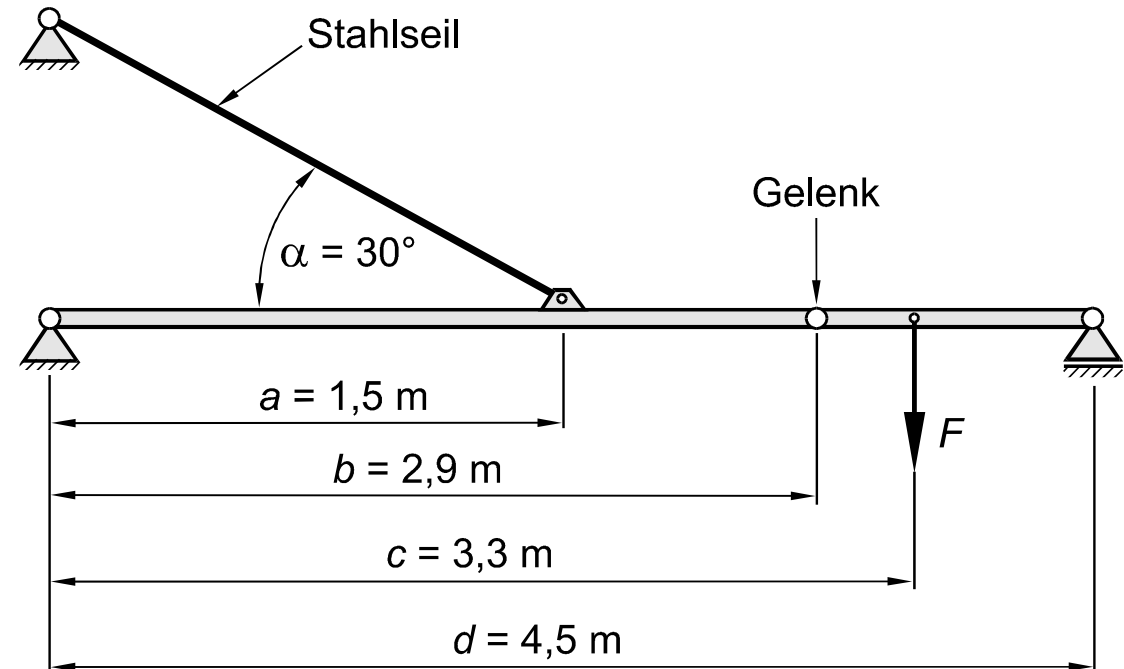
Werkstoffkennwerte des Spannstahls:

$$R_{p0,2} = 720 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

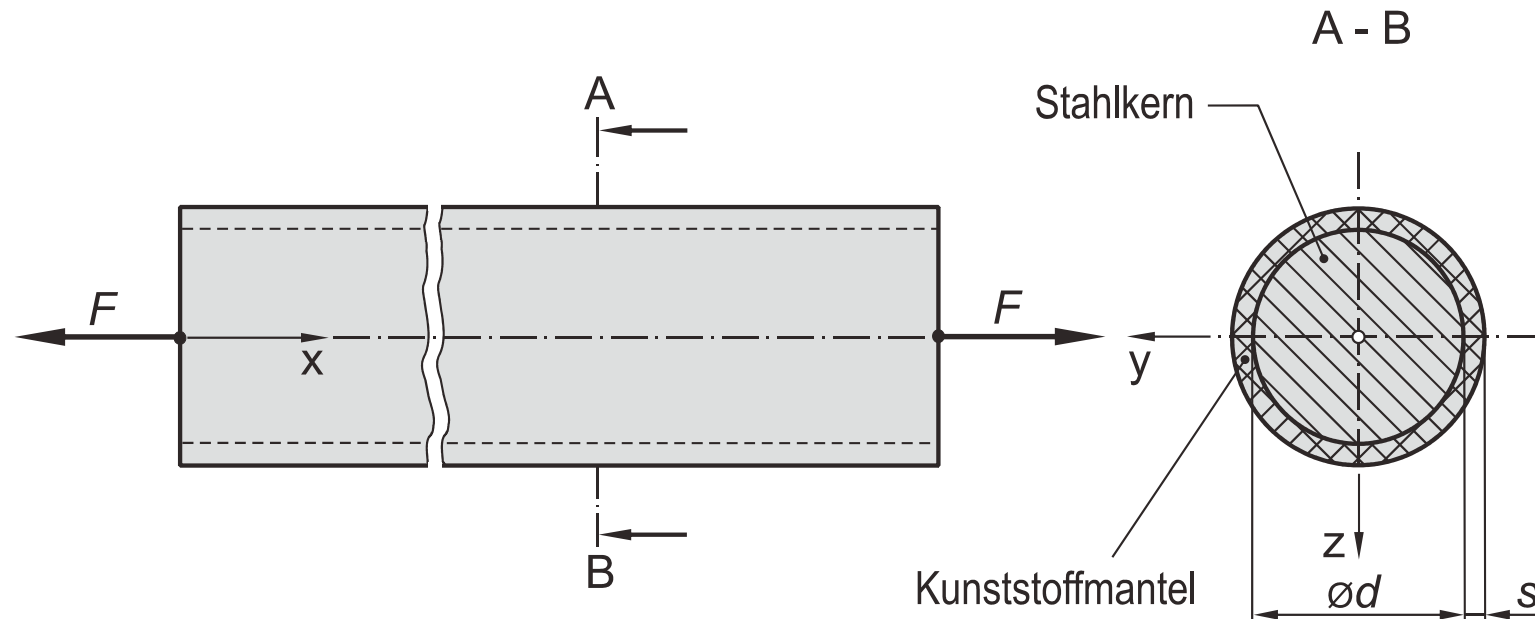
$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.8



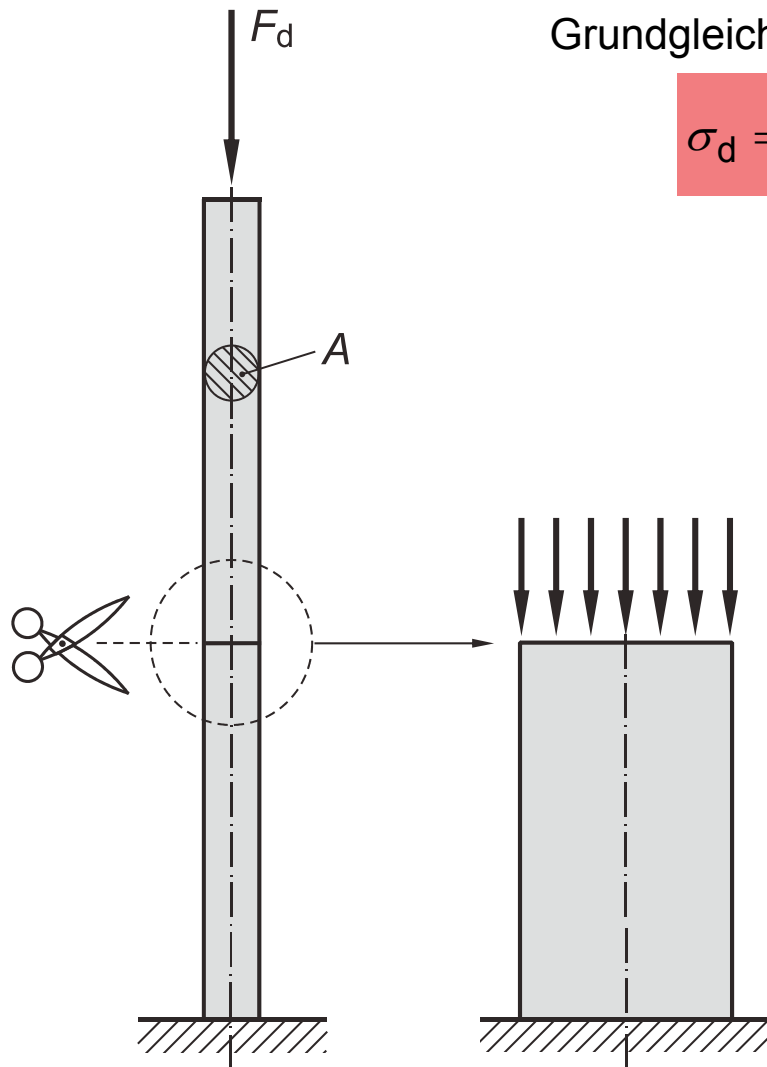
Ein Stahlseil ($R_{p0,2} = 980 \text{ N/mm}^2$, $E = 212\,000 \text{ N/mm}^2$) mit einem Durchmesser von 50 mm und einer Länge von 75 m wurde aus Gründen des Korrosionsschutzes mit einer thermoplastischen Kunststoffscheicht ($E = 12\,500 \text{ N/mm}^2$) mit einer Dicke von 3 mm ummantelt. Stahlseil und Kunststoffmantel können als fest miteinander verbunden betrachtet werden.

Berechnen Sie für eine Zugkraft von $F = 1250 \text{ kN}$ die Verlängerung der Stahlseils sowie die Spannungen im Stahlkern und im Kunststoffmantel. Das Werkstoffverhalten des Kunststoffmantels kann als linear-elastisch betrachtet werden.

Grundbelastungsarten

Druck

Spannungsermittlung



Grundgleichung:

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$$

F_d (Druck-)Kraftkomponente senkrecht zur Schnittfläche (N)

A Schnittfläche (mm²)

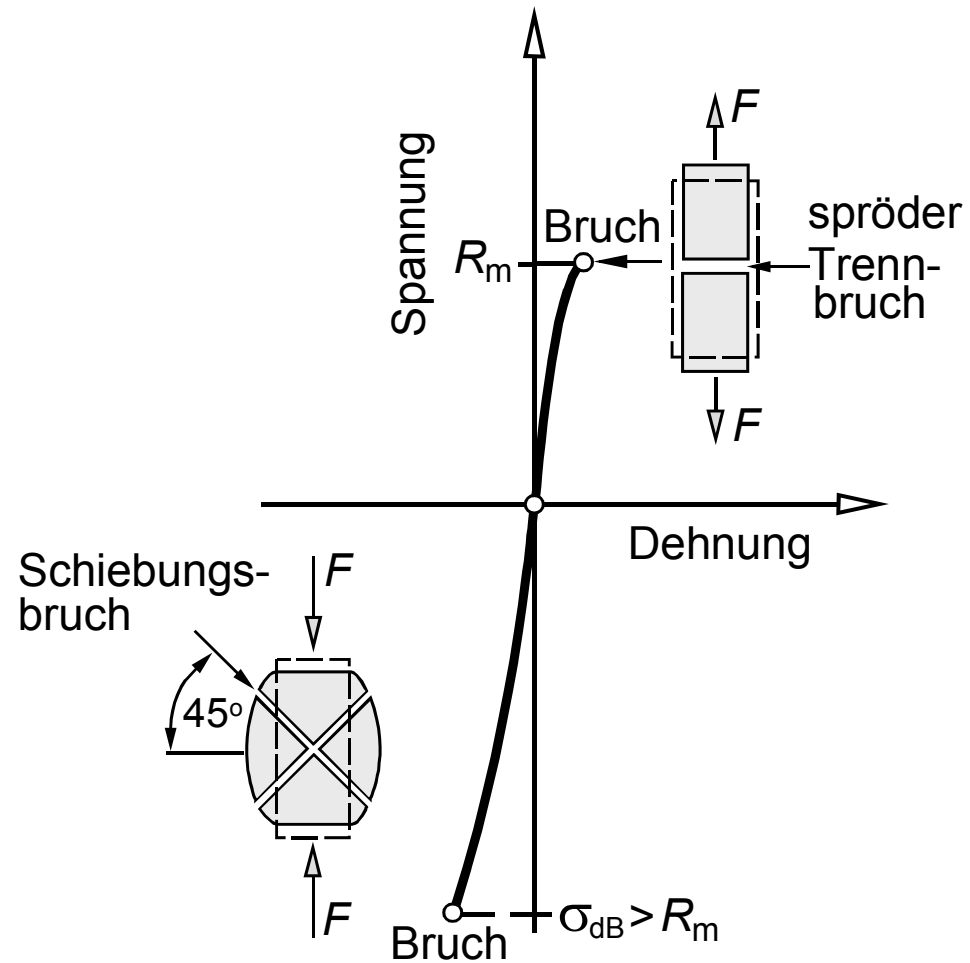
σ_d (Zug-)Normalspannung (N/mm²)

Duktile Metalle mit ausgeprägter Streckgrenze



Grundbelastungsarten

Spröde Werkstoffe



Kennwert: Druckfestigkeit (σ_{dB})

Grundbelastungsarten

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F}$ bzw. $\frac{\sigma_{dp}}{S_F}$ mit $S_F = 1,2 \dots 2,0$
- Knickung: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$ mit $S_K = 2,5 \dots 5,0$
 $\sigma_K = \text{Knickspannung (siehe Folie 8-3)}$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte für σ_{zul} .

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$
- Knickung: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$ mit $S_K = 2,5 \dots 5,0$
 $\sigma_K = \text{Knickspannung (siehe Folie 8-3)}$

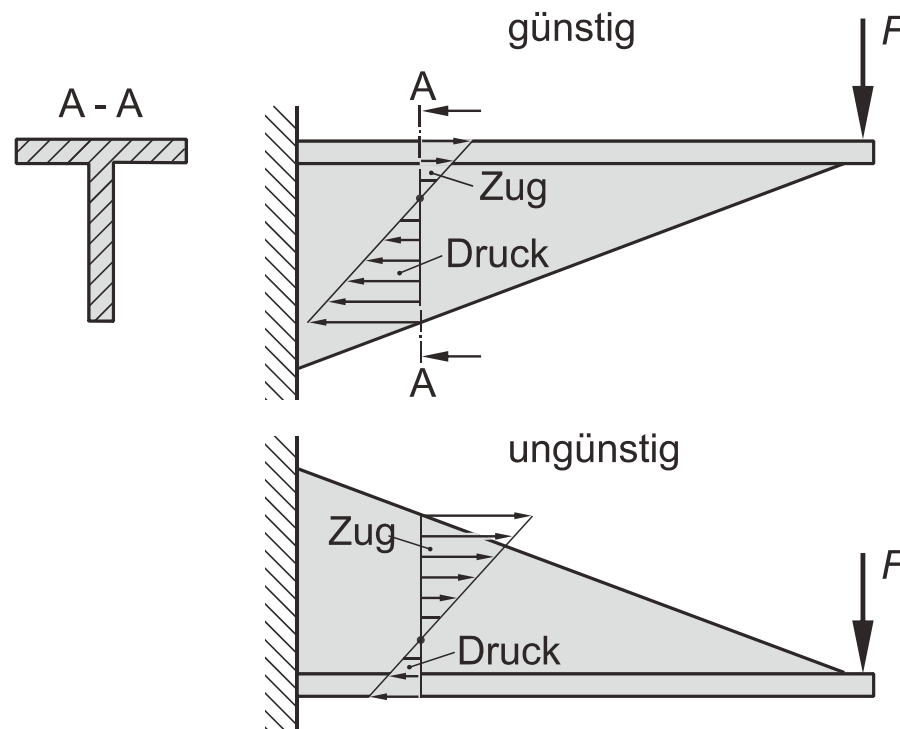
Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte für σ_{zul} .

Grundbelastungsarten

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Werkstoffgerechtes Konstruieren mit spröden Werkstoffen



Wird bei der Konstruktion von Bauteilen aus spröden Werkstoffen (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit) darauf geachtet, dass die höchst beanspruchten Querschnitte überwiegend Druckspannungen ausgesetzt sind, dann kann ihre Beanspruchbarkeit deutlich verbessert werden (werkstoffgerechtes Konstruieren).

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.9

○○○○●

Eine Stahlstütze aus Werkstoff S235JR mit Kreisringquerschnitt soll eine axiale Druckkraft von $F = 120 \text{ kN}$ aufnehmen. Die Stütze hat die Länge $l_0 = 1600 \text{ mm}$ und einen Außendurchmesser von $d_a = 100 \text{ mm}$.

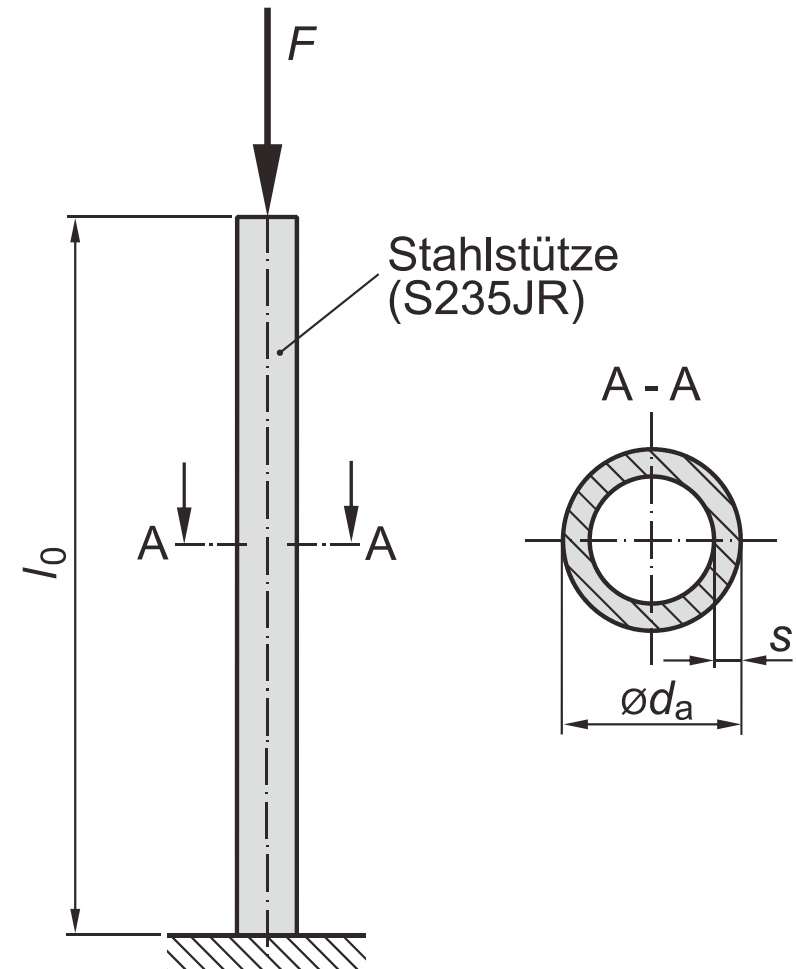
Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 390 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

- Auf welche Weise kann die Stütze versagen?
- Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit die Druckkraft F mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) aufgenommen werden kann (Berechnung nur gegen Fließen).
- Um welchen Betrag Δl verkürzt sich die Stütze für die in Teil b) errechnete Wandstärke unter Wirkung der Druckkraft von $F = 120 \text{ kN}$?



Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.11



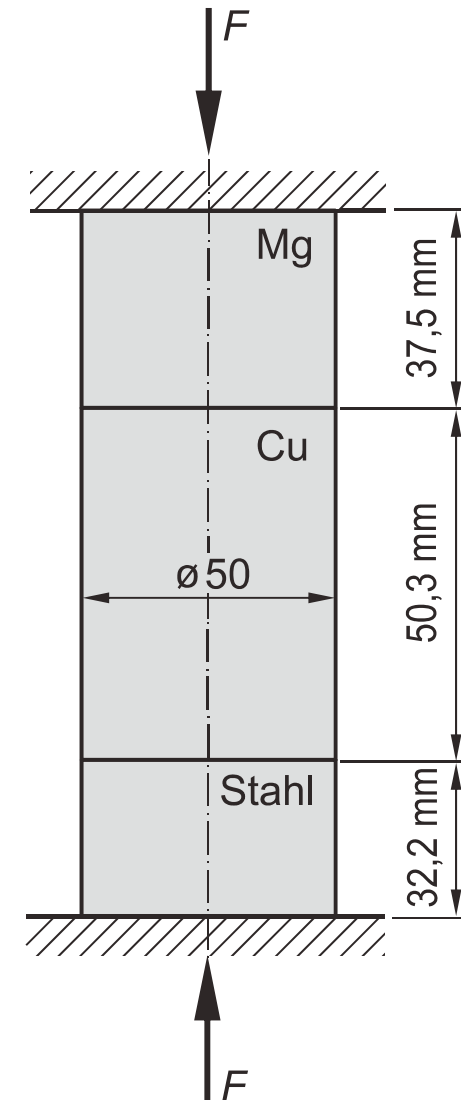
Zwischen den ebenen, starren Druckplatten einer Hydraulikpresse werden drei eben aufeinander liegende Metallscheiben mit gleichem Durchmesser ($d = 50 \text{ mm}$) jedoch aus verschiedenen Werkstoffen (Magnesium, Kupfer und Stahl) auf Druck beansprucht (siehe Abbildung). Bei der zunächst unbekannten Druckkraft F wird an einer Messuhr die gemeinsame Verkürzung $\Delta l = 0,25 \text{ mm}$ ermittelt.

Scheibe 1: Magnesium: $E = 45000 \text{ N/mm}^2$

Scheibe 2: Kupfer: $E = 120000 \text{ N/mm}^2$

Scheibe 3: Stahl: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

- Berechnen Sie die Druckkraft F .
- Ermitteln Sie die Spannungen in den einzelnen Metallscheiben.
- Berechnen Sie die Verkürzungen der einzelnen Metallscheiben unter Wirkung der Druckkraft F .



Grundbelastungsarten

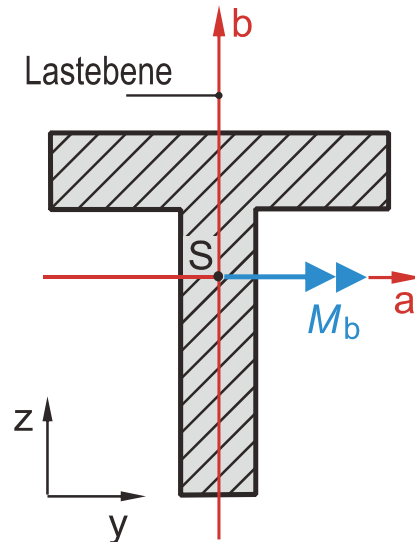
Biegung

Gerade und schiefe Biegung

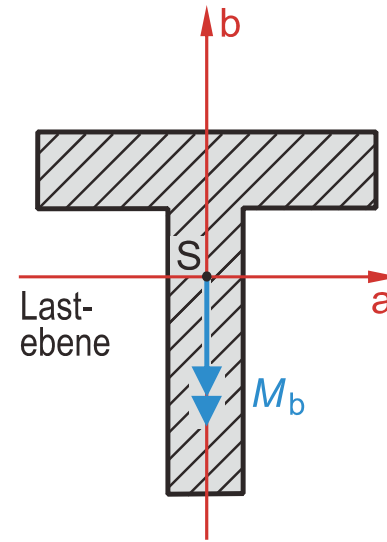
Gerade Biegung

Biegemomentenvektor fällt mit einer der Hauptachsen zusammen

a) Belastung in der Symmetrieebene



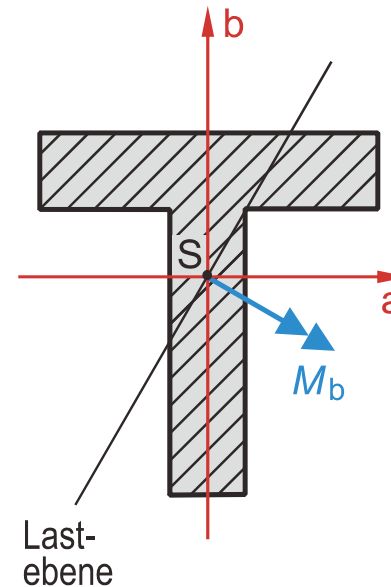
b) Belastung senkrecht zur Symmetrieebene



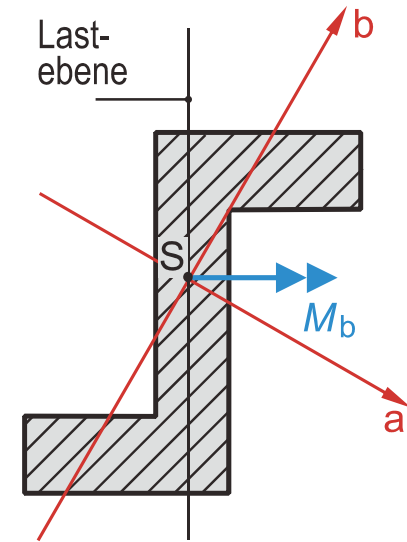
Schiefe Biegung

Biegemomentenvektor fällt nicht mit einer der Hauptachsen zusammen

c) symmetrischer Querschnitt



d) unsymmetrischer Querschnitt



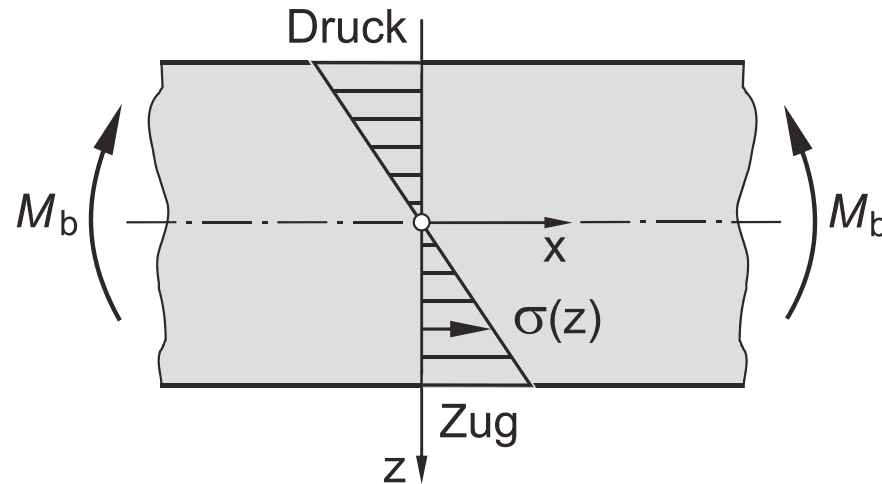
a, b Hauptachsen der Fläche

Hauptachsen:

Zwei zueinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt einer Fläche bezüglich derer die axialen Flächenmomente 2. Ordnung Extremwerte annehmen d. h. das gemischte Flächenmoment Null wird, werden als **Hauptachsen** bezeichnet. Für einfach symmetrische Querschnitte (z. B. T-Profil) sind die Symmetrieachse und deren Senkrechte durch den Flächenschwerpunkt S stets Hauptachsen.

Grundbelastungsarten

Spannungsermittlung



Grundgleichung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

σ_b maximale Biegespannung i. d. Randfaser (N/mm²)

M_b Biegemoment (Nmm)

W_b axiales Widerstandsmoment (mm³)

I axiales Flächenmoment 2. Ordnung (mm⁴)

z_{\max} maximaler Randfaserabstand (mm)

Weitere Beziehungen:

$$\sigma(z) = \frac{M_b}{I} \cdot z$$

$$W_b = \frac{I}{z_{\max}}$$

Grundbelastungsarten

Die Grundgleichung für gerade Biegung gilt unter folgenden Voraussetzungen:

1. Lastebene und Balkenachse fallen zusammen (ansonsten verdrehen oder kippen).
2. Es treten keine Querkräfte, keine Normalkraft und kein Torsionsmoment auf, also:

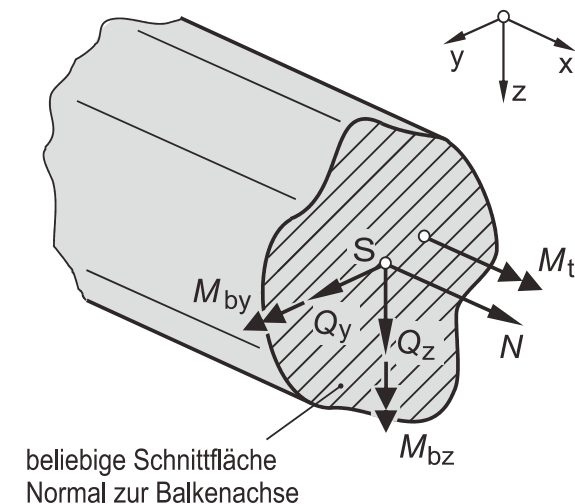
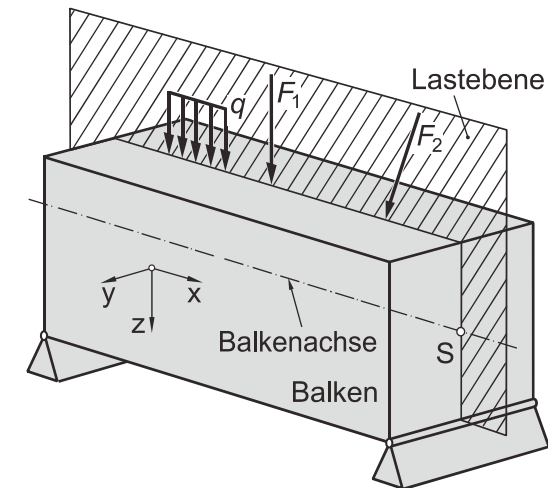
$$Q_x = Q_y = 0 \text{ (reine d. h. querkraftfreie Biegung)}$$

$$N = 0$$

$$M_t = 0$$

Falls Querkräfte und damit Schubspannungen auftreten, so werden diese vernachlässigt gegenüber der Biegespannung (nur bei kleinen Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Balkenlänge zulässig).

3. Zur Balkenachse senkrechte Querschnittsflächen bleiben eben (keine Verwölbung) und stehen senkrecht zur neutralen Faser (Bernoullische Hypothese).
4. Elastizitätsmodul ist konstant d. h. nicht von der Spannung abhängig.



Grundbelastungsarten

Werkstoffverhalten und Kennwerte

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

Biegefließgrenze: σ_{bF} mit $\sigma_{bF} \approx R_e$ bzw. $R_{p0,2}$

Spröde Werkstoffe

Biegefestigkeit: σ_{bB} (Achtung: $\sigma_{bB} > R_m$)

Grundbelastungsarten

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F}$ mit $S_F = 1,2 \dots 2,0$
- Bruch: tritt unter Biegebeanspruchung bei duktilen Werkstoffen nicht auf

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bB}}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

Grundbelastungsarten

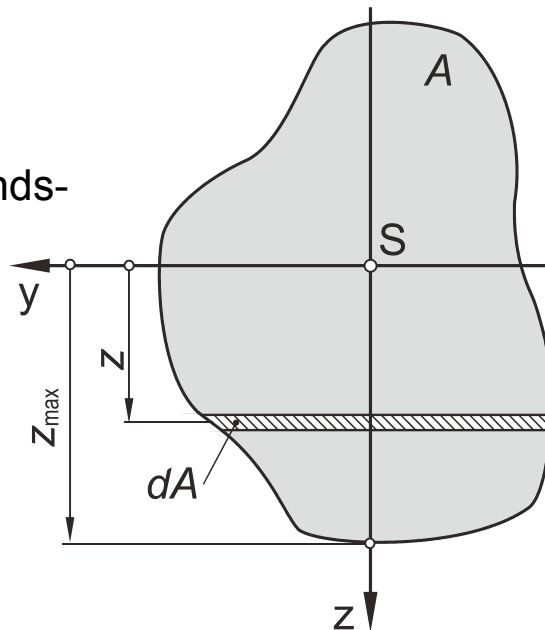
Axiale Widerstandsmomente und axiale Flächenmomente

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung

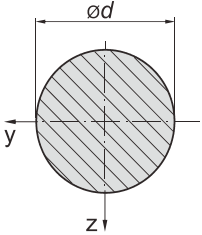
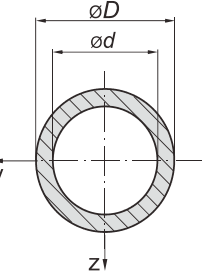
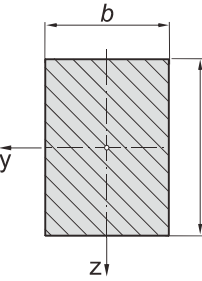
$$I = \int_A z^2 dA$$

Axiales Widerstandsmoment

$$W_b = \frac{I}{z_{\max}}$$



Beispiele:

Vollkreisquerschnitt		
	$I_y = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$ $I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$W_{by} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$ $W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$
Kreisringquerschnitt		
	$I_y = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$ $I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_{by} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$ $W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
Rechteckquerschnitt		
	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$

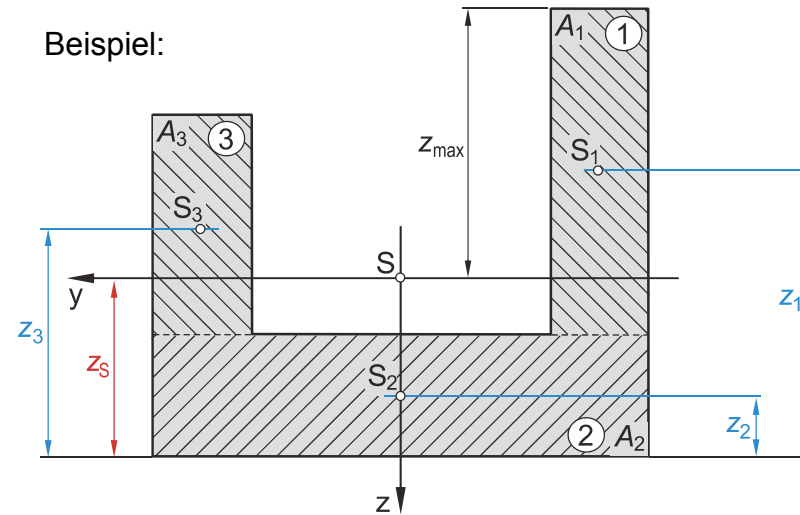
Grundbelastungsarten

Flächenmomente zusammengesetzter Querschnitte

Teilschwerpunktsatz

$$z_S = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

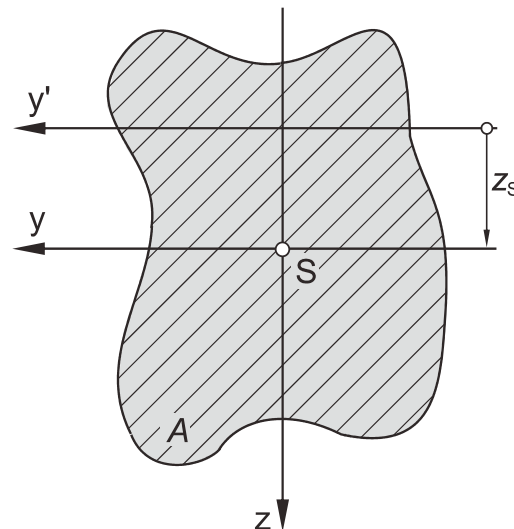
Beispiel:



Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bei Parallelverschiebung der Koordinatenachsen

$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A$$

Satz von Steiner
(siehe auch Kapitel 9)



Grundbelastungsarten

Achtung:

- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung (I) dürfen addiert und subtrahiert werden, sofern sie auf die gleiche Achse bezogen sind. Dies gilt jedoch *nicht* für die axialen Widerstandsmomente (W_b).
- Der Steinersche Satz stellt stets einen Zusammenhang zwischen den Flächenmomenten bezüglich einer *Achse durch den Flächenschwerpunkt* bzw. eines *Koordinatensystems mit Ursprung im Flächenschwerpunkt* und einer dazu parallelen Achse bzw. eines parallel verschobenen Koordinatensystems her. Der Steinersche Satz darf hingegen *nicht* angewandt werden, um eine Beziehung zwischen den Flächenmomenten bezüglich beliebiger Achsen bzw. Koordinatensysteme herzustellen (siehe auch Aufgabe 2-19).

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.12



Der dargestellte Kastenträger aus Werkstoff S275JR ist beidseitig gelenkig gelagert und wird durch die statisch wirkende Kraft $F = 25 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Das Eigengewicht des Trägers sowie Schubspannungen durch Querkräfte sollen vernachlässigt werden.

Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) ausgeschlossen werden kann.

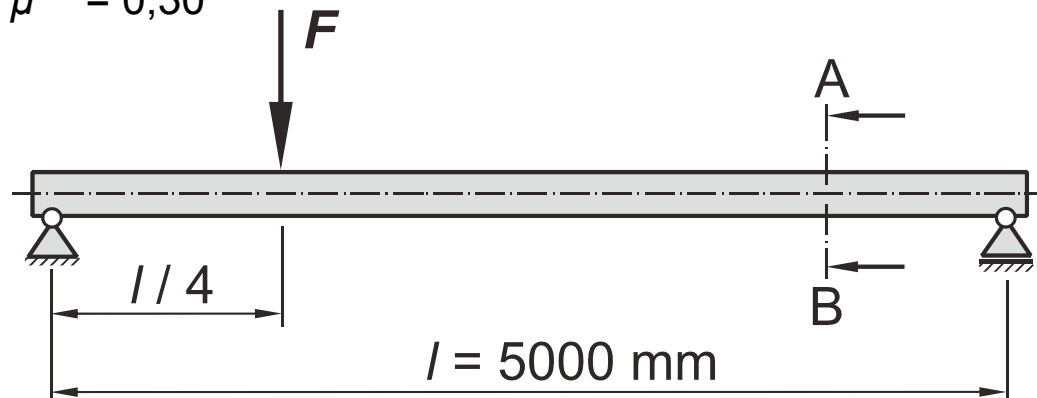
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 275 \text{ N/mm}^2$$

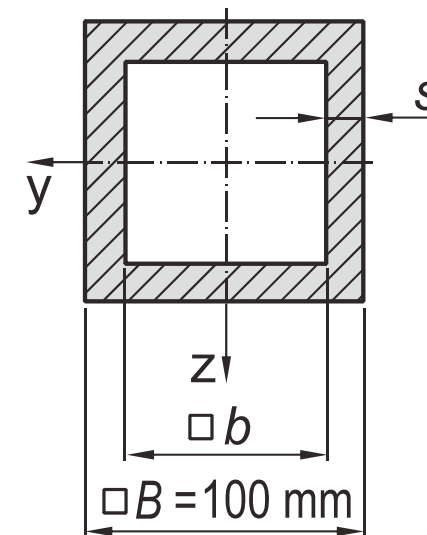
$$R_m = 540 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



A - B



Grundbelastungsarten

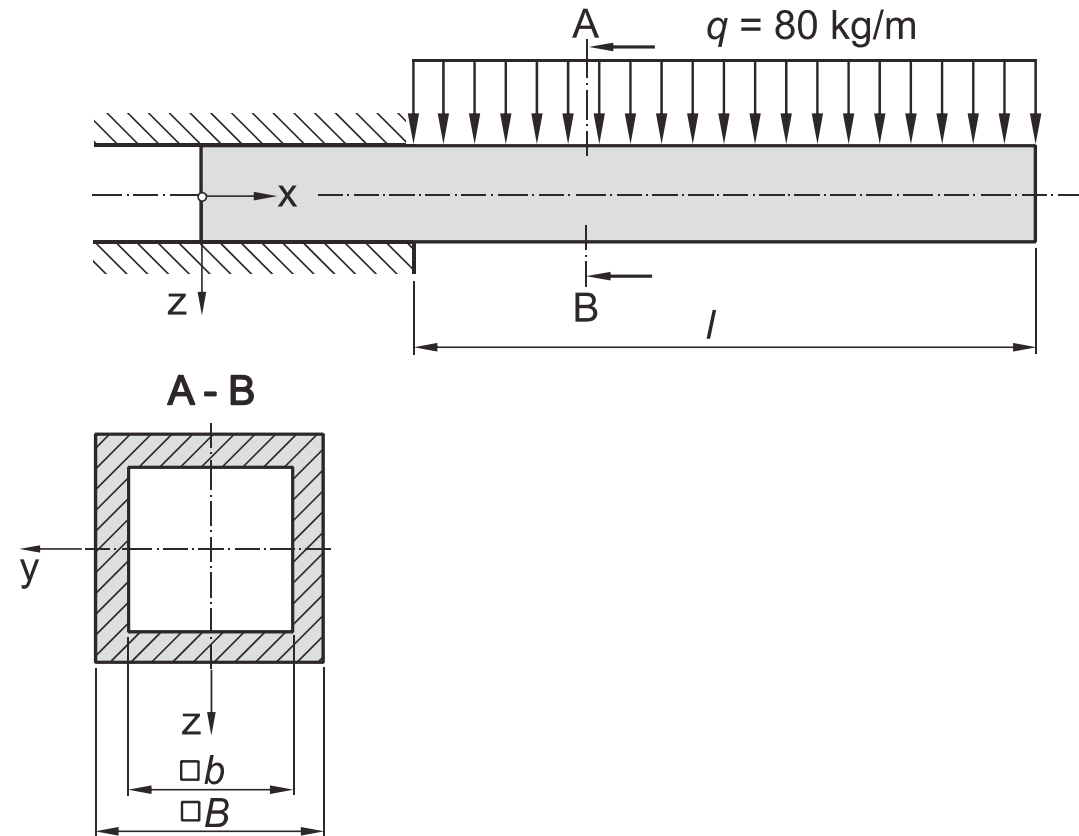
Aufgabe 2.15



Ein Stahlträger mit quadratischer Querschnittsfläche ($B = 200 \text{ mm}$; $b = 180 \text{ mm}$) aus Baustahl S355JR ($R_e = 355 \text{ N/mm}^2$) wird beim Bau einer Stahlkonstruktion frei tragend vorgeschoben. Die Masse des Trägers beträgt samt Zusatzlast $q = 80 \text{ kg/m}$ (Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

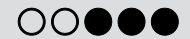
Berechnen Sie die maximal mögliche freie Länge l des Stahlträgers, damit plastische Verformungen infolge des Eigengewichts mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) ausgeschlossen werden können.

Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte können vernachlässigt werden.



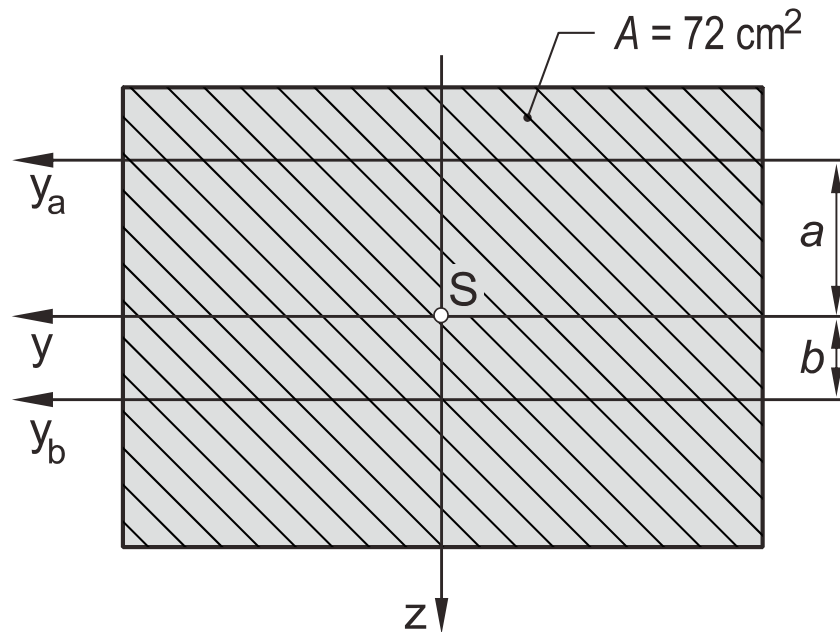
Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.19



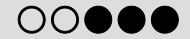
Der dargestellte Rechteckquerschnitt hat eine Fläche von $A = 72 \text{ cm}^2$. Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y_a -Achse ($a = 5 \text{ cm}$) ist bekannt und beträgt $I_{y_a} = 2664 \text{ cm}^4$.

Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y_b -Achse ($b = 2 \text{ cm}$).



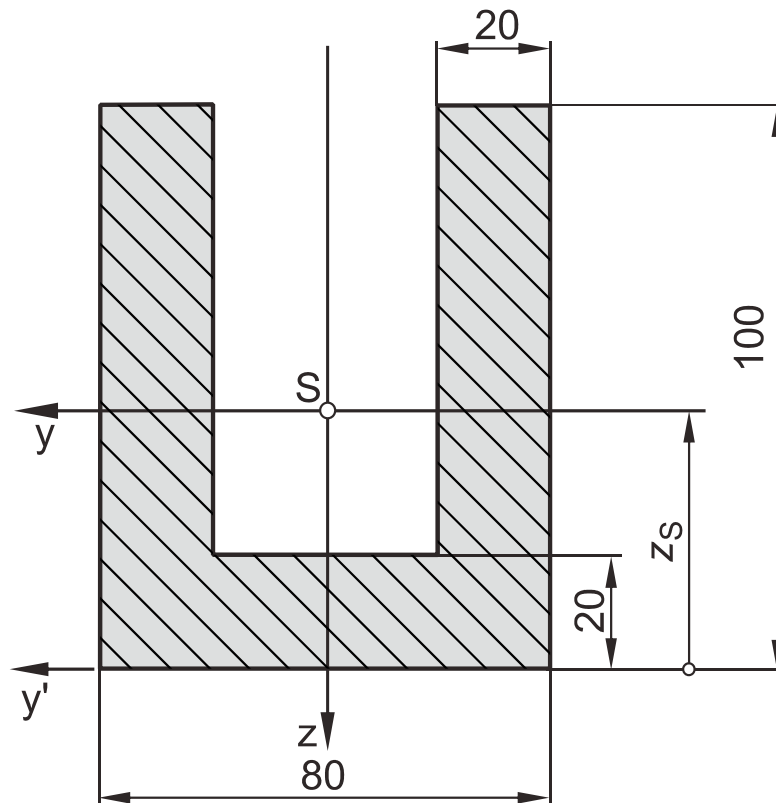
Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.20



Das dargestellte U-Profil setzt sich aus drei Rechtecken zusammen.

- Ermitteln Sie den Abstand z_S des Flächenschwerpunktes S von der y' -Achse.
- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I_y) bezüglich der y -Achse (Achse durch den Flächenschwerpunkt S).



Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.22



Ein gelenkig gelagerter U-Profilstab aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR wird durch eine statisch wirkende Zugkraft F beansprucht.

Werkstoffkennwerte S275JR:

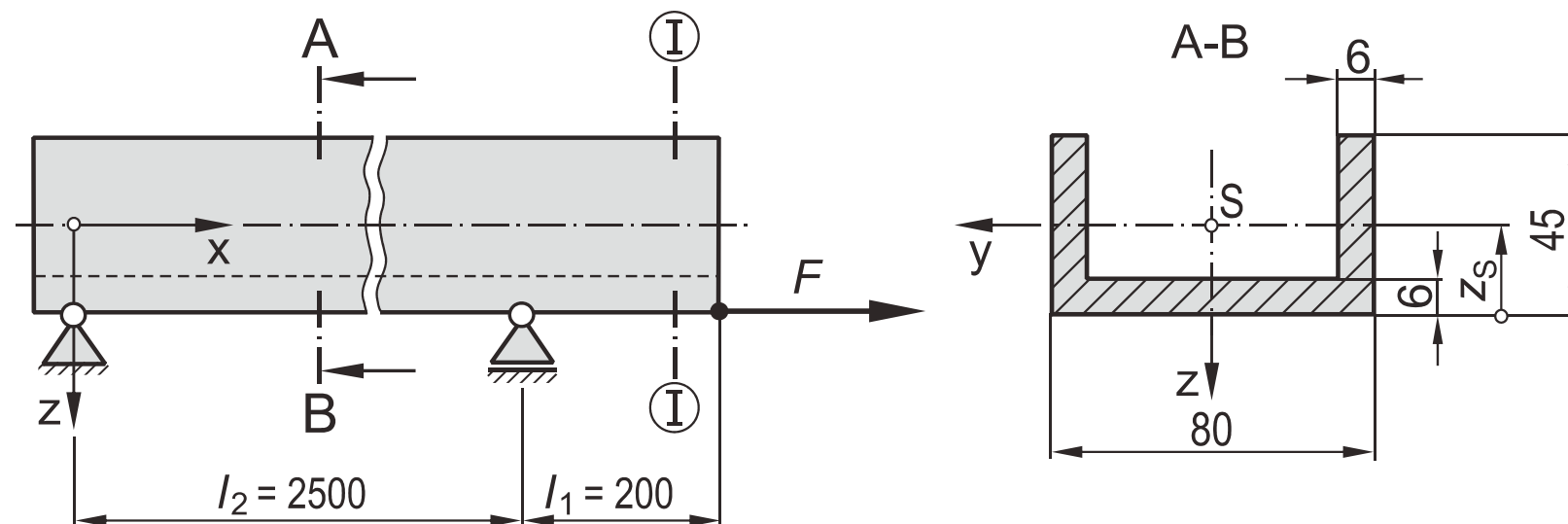
$$R_{p0,2} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

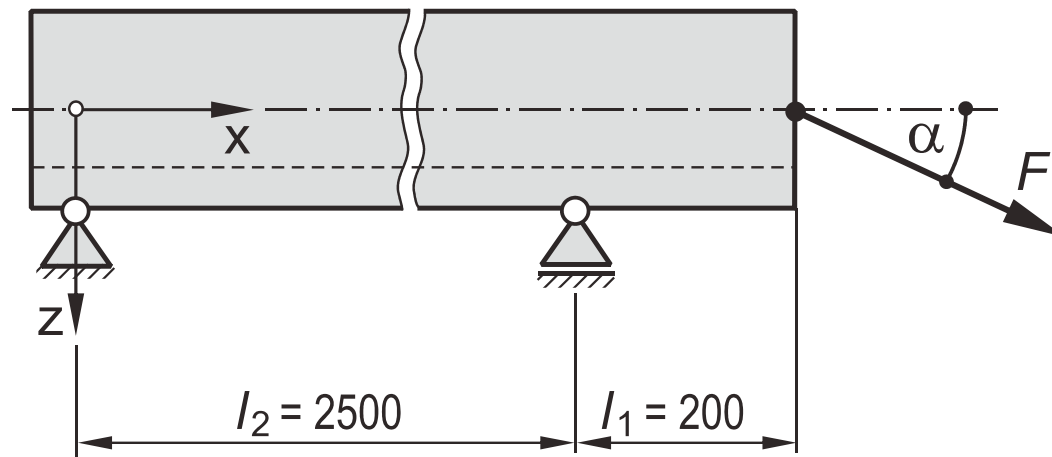
Bei einem ersten zu untersuchenden Lastfall wirkt die Zugkraft F in horizontaler Richtung (x-Richtung). Der Kraftangriffspunkt befindet sich am unteren Ende der Querschnittsfläche (siehe Abbildung).



Grundbelastungsarten

- Berechnen Sie Lage des Flächenschwerpunktes (Maß z_s) sowie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung des U-Profils bezüglich der y-Achse (I_y).
- Berechnen Sie die zulässige Zugkraft F , falls an keiner Stelle der Querschnittsfläche I - I eine Spannung von $\sigma_{zul} = 150 \text{ N/mm}^2$ überschritten werden darf.

Bei einem zweiten zu untersuchenden Lastfall greift die Kraft F im Flächenschwerpunkt S unter einem Winkel von $\alpha = 25^\circ$ zur Horizontalen (x-Richtung) an.

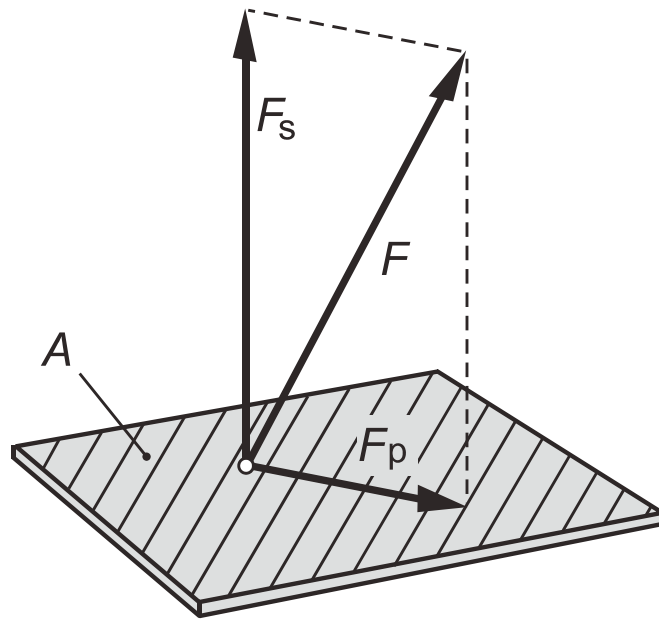


- Ermitteln Sie die zulässige Zugkraft F , damit Fließen an der höchst beanspruchten Stelle mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann. Schubspannungen durch Querkräfte können vernachlässigt werden.

Grundbelastungsarten

Schub (Abscherung)

Definition der Normal- und Schubspannung



Definition der Normalspannung σ (siehe auch Folie 2-3)

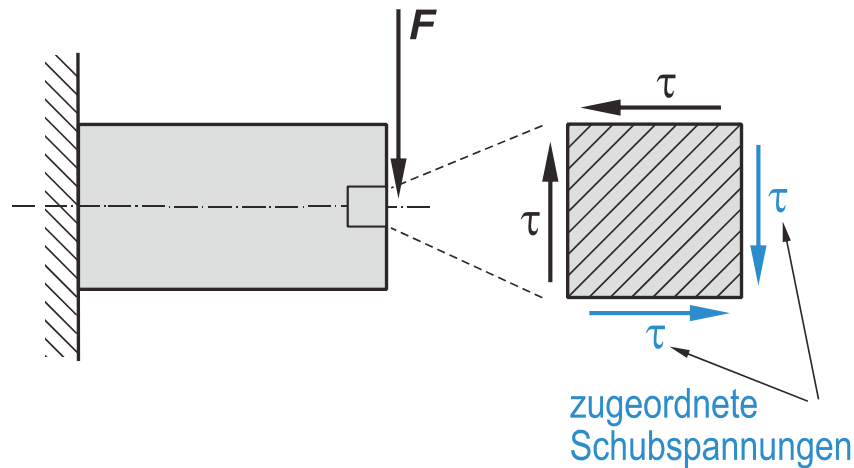
$$\sigma = \frac{F_s}{A}$$

Definition der Schubspannung τ

$$\tau = \frac{F_p}{A}$$

Grundbelastungsarten

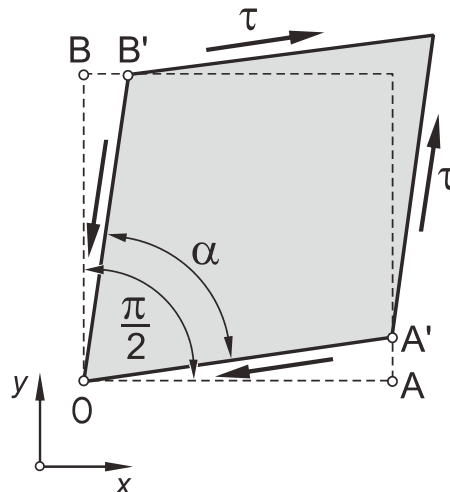
Zugeordnete Schubspannungen



Schubspannungen treten aus Gründen des Momentengleichgewichts stets paarweise aus (**zugeordnete Schubspannungen**).

Zugeordnete Schubspannungen wirken stets in zwei zueinander senkrechten Ebenen des betrachteten Volumenelements. Sie haben den gleichen Betrag und zeigen entweder auf die gemeinsame Kante hin oder von ihr weg.

Schiebung (Winkelverzerrung)



Definition der Schiebung γ (Winkelverzerrung)

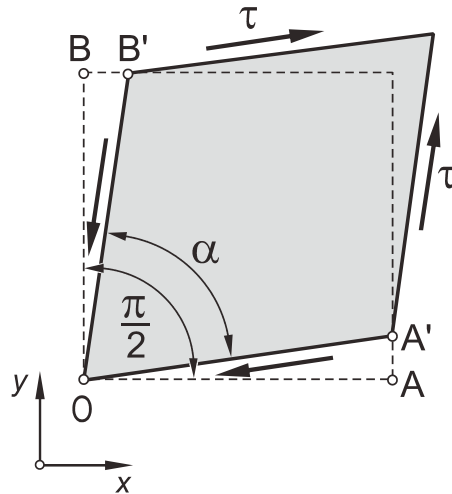
$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$\gamma > 0$: Winkelvergrößerung

$\gamma < 0$: Winkelverkleinerung

Grundbelastungsarten

Formänderung durch Schubspannungen



Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten E , G und μ (für isotrope Werkstoffe)

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

E = Elastizitätsmodul

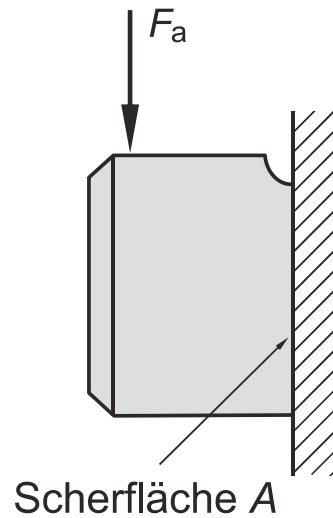
G = Schubmodul

μ = Querkontraktionszahl

Grundbelastungsarten

Spannungsermittlung

a)



Grundgleichung:

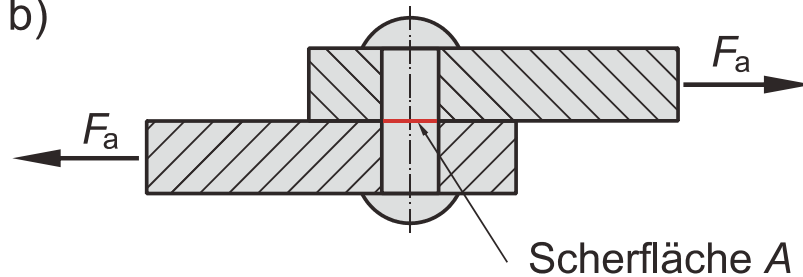
$$\tau_a = \frac{F_a}{A}$$

τ_a mittlere Abscherspannung (N/mm²)

A abgeschnittene Schnittfläche (mm²)

F_a Schubkraft (N)

b)



Beispiele für Abscherbeanspruchung

Grundbelastungsarten

Werkstoffverhalten und Kennwerte

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

Scherfestigkeit: τ_{aB} mit $\tau_{aB} \approx 0,6 \dots 0,9 \cdot R_m$
($0,6 \cdot R_m$ für hochfeste und $0,9 \cdot R_m$ für niedrigfeste Werkstoffe)

Für Stähle mit $R_m < 1800 \text{ N/mm}^2$ kann alternativ die empirische Beziehung verwendet werden:

$$\tau_{aB} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$$

Spröde Werkstoffe

τ_{aB} experimentell ermitteln (Scherversuch DIN 50141)

Sonderfall Gusseisen mit Lamellengraphit: $\tau_{aB} \approx R_m$

Grundbelastungsarten

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: Wird bei Schubbeanspruchung und duktilen Werkstoffen nicht betrachtet
- Bruch: $\tau_{zul} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$ mit $S_B = 2,0 \dots 4,0$

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\tau_{zul} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

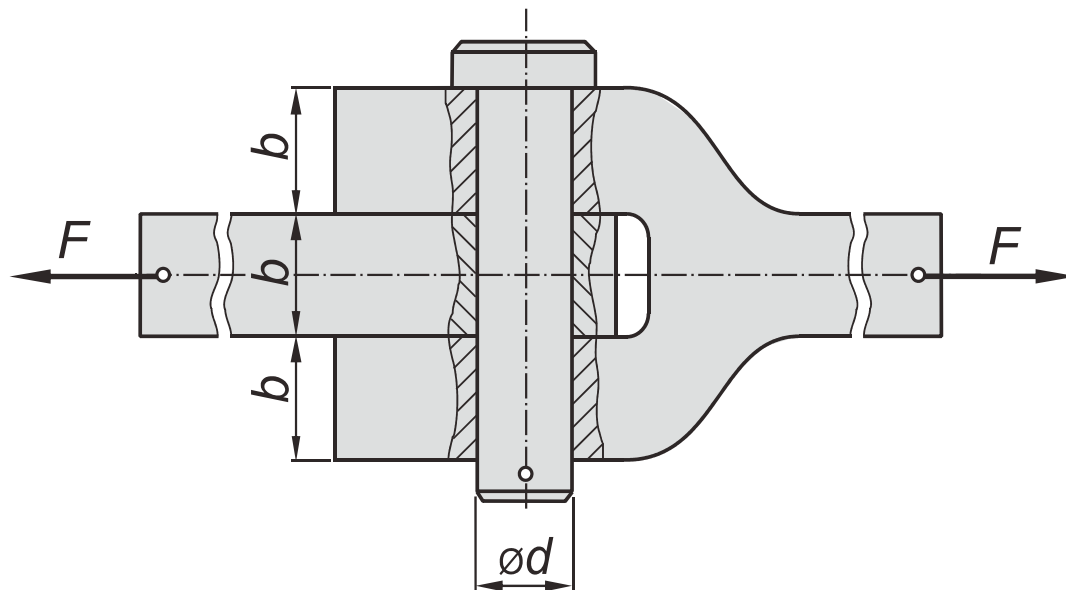
Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.23



Über eine einfache Laschenverbindung aus unlegiertem Baustahl E295 ($R_e = 295 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 490 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{aB} = 150 \text{ N/mm}^2$) soll eine Kraft von $F = 35 \text{ kN}$ übertragen werden.

- Ermitteln Sie den Durchmesser d des Bolzens, damit eine sichere Kraftübertragung erfolgen kann ($S_B = 2,0$).
- Bestimmen Sie für den Bolzen gemäß Aufgabenteil a) die maximale Biegespannung σ_b . Zwischen Bolzen und Laschen soll dabei ausreichend Spiel bestehen. Das Maß b soll 20 mm betragen.
- Berechnen Sie die maximale Flächenpressung p in der Laschenverbindung.

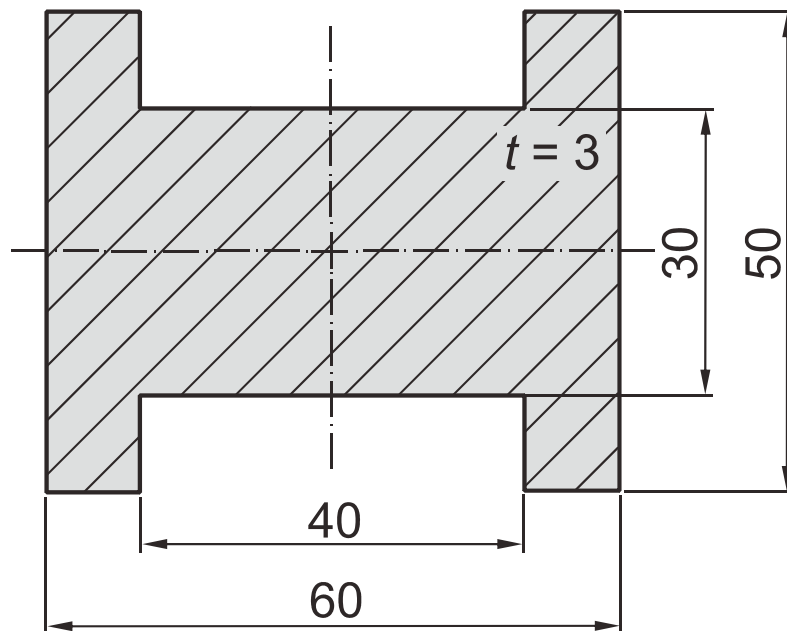


Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.26

○○○○●

Aus einer Blechtafel aus der Aluminium-Legierung EN AW-Al Mg3-H14 ($\tau_{aB} = 290 \text{ N/mm}^2$) mit einer Dicke von $t = 3 \text{ mm}$ soll das dargestellte Teil ausgestanzt werden. Ermitteln Sie die mindestens erforderliche Stanzkraft F_S .



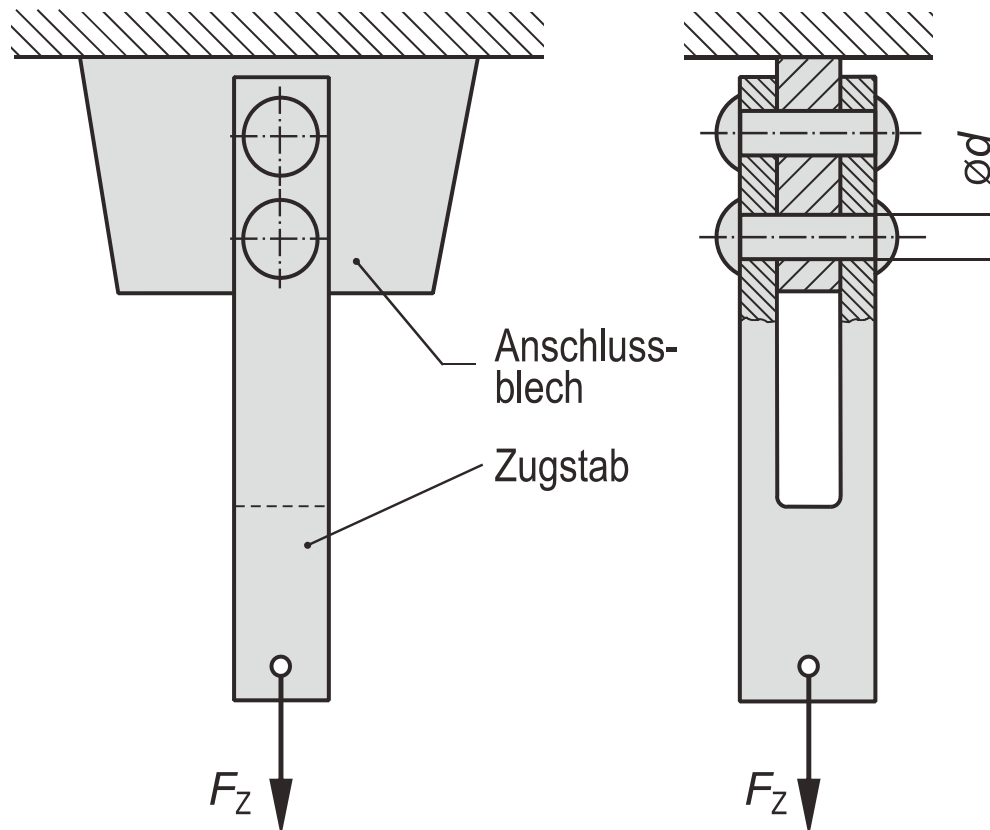
Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.27



Der dargestellte Zugstab wird durch zwei Stahlnieten mit dem Anschlussblech verbunden (jeweils zweischnittige Nietverbindung).

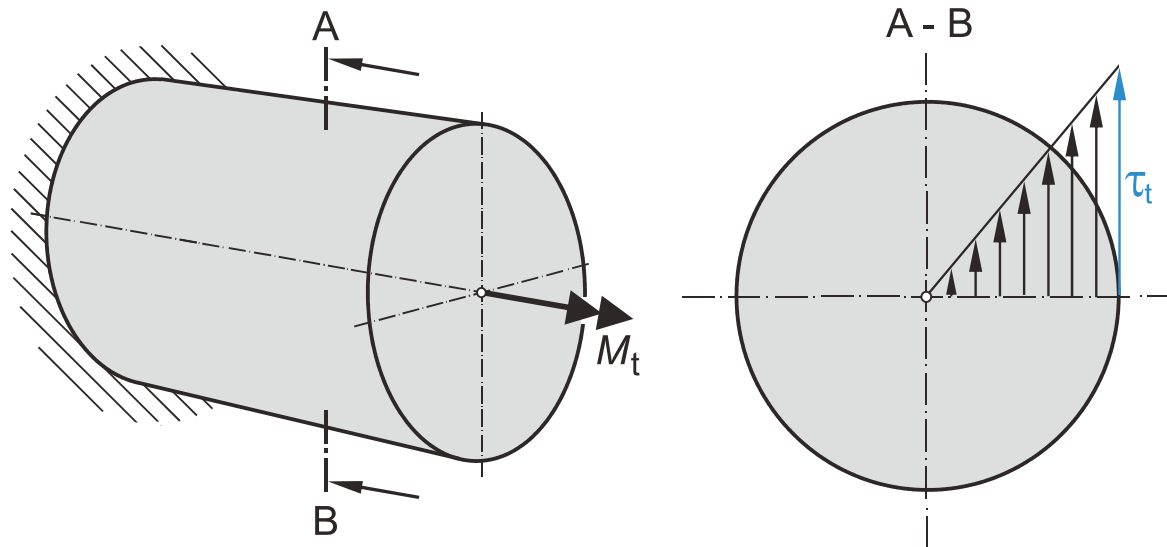
Ermitteln Sie den erforderlichen Durchmesser d der Nieten, damit eine statisch wirkende Zugkraft von $F_Z = 100 \text{ kN}$ mit Sicherheit ($S_B = 3,5$) aufgenommen werden kann. Als Werkstoff für die Nieten soll C22 verwendet werden (Scherfestigkeit $\tau_{aB} = 290 \text{ N/mm}^2$).



Grundbelastungsarten

Torsion

Spannungsermittlung



Grundgleichung:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

τ_t maximale Schubspannung in der Randfaser (N/mm²)

M_t Torsionsmoment (Nmm)

W_t Widerstandsmoment gegen Torsion (mm³)

I_P polares Flächenmoment (mm⁴)

Verdrehwinkel:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_P}$$

φ Verdrehwinkel (Bogenmaß)

l Stablänge (mm)

G Schubmodul, mit $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$

Die Gleichungen gelten nur für Vollkreis- und Kreisringquerschnitte!

Grundbelastungsarten

Werkstoffverhalten und Kennwerte

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

Torsionsfließgrenze: τ_{tF} mit $\tau_{tF} = R_e/2$ bzw. $R_{p0,2}/2$

Torsionsfestigkeit: τ_{tB} mit $\tau_{tB} \approx 0,6 \dots 0,9 \cdot R_m$
 ($0,6 \cdot R_m$ für hochfeste und $0,9 \cdot R_m$ für niedrigfeste Werkstoffe)

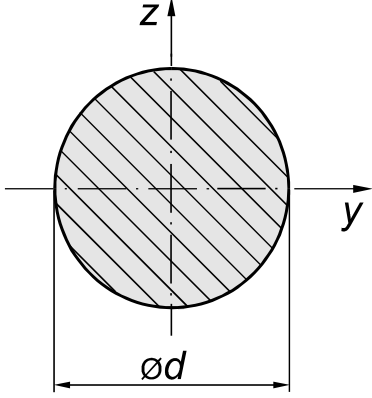
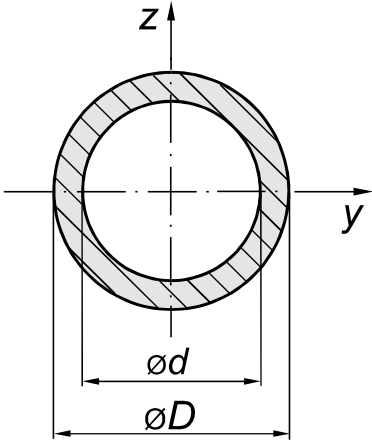
Für Stähle mit $R_m < 1800 \text{ N/mm}^2$ kann alternativ die empirische Beziehung verwendet werden:
 $\tau_{tB} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$

Spröde Werkstoffe

Torsionsfestigkeit: τ_{tB} mit $\tau_{tB} = R_m$

Grundbelastungsarten

Polare Flächenmomente (I_p) und Widerstandsmomente gegen Torsion (W_t)

Vollkreisquerschnitt		
	$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Kreisringquerschnitt		
	$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$

Grundbelastungsarten

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: $\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$ mit $S_F = 1,2 \dots 2,0$

- Bruch: $\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$ mit $S_B = 2,0 \dots 4,0$

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_t \leq \tau_{zul}$$

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.29



Ein Rohr aus Werkstoff S275JR mit einem Außendurchmesser $d_a = 50$ mm und einer Wandstärke von $s = 6$ mm wird durch ein Torsionsmoment M_t statisch beansprucht.

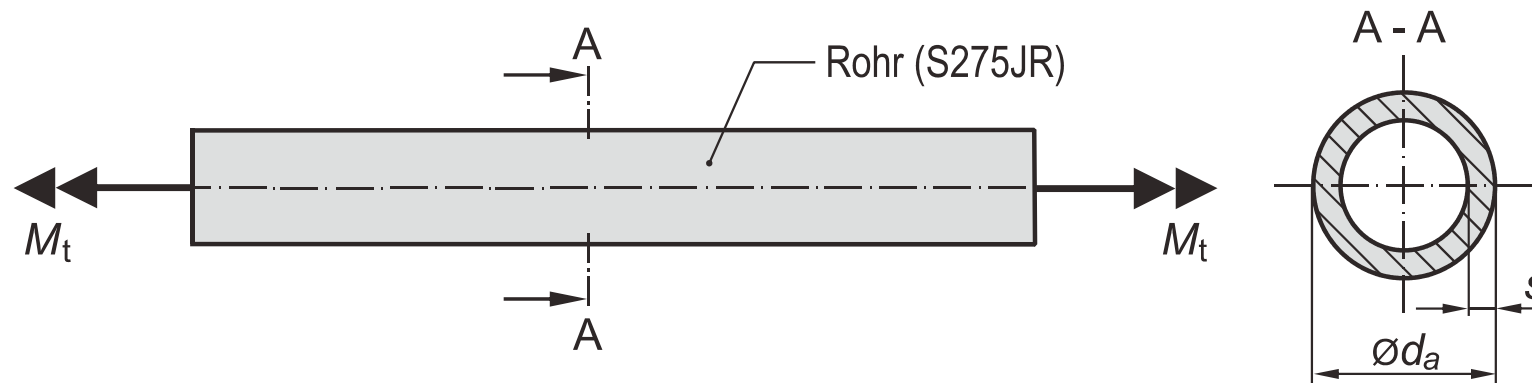
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 295 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 490 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

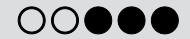
$$\mu = 0,30$$



- Skizzieren Sie qualitativ den Spannungsverlauf über der Querschnittsfläche.
- Ermitteln Sie das zulässige Torsionsmoment, damit ein Versagen mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann ($S_F = 1,2$ und $S_B = 2,0$).

Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.31



Ein Stab mit kreiszylindrischer Querschnittsfläche aus dem Vergütungsstahl 42CrMo4 mit den in der Abbildung gegebenen Abmessungen, ist an einem Ende fest eingespannt und wird an seinem anderen Ende durch das statisch wirkende, tangential angreifende Kräftepaar F auf Torsion beansprucht. Die Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie im Bereich der Durchmesseränderung kann vernachlässigt werden.

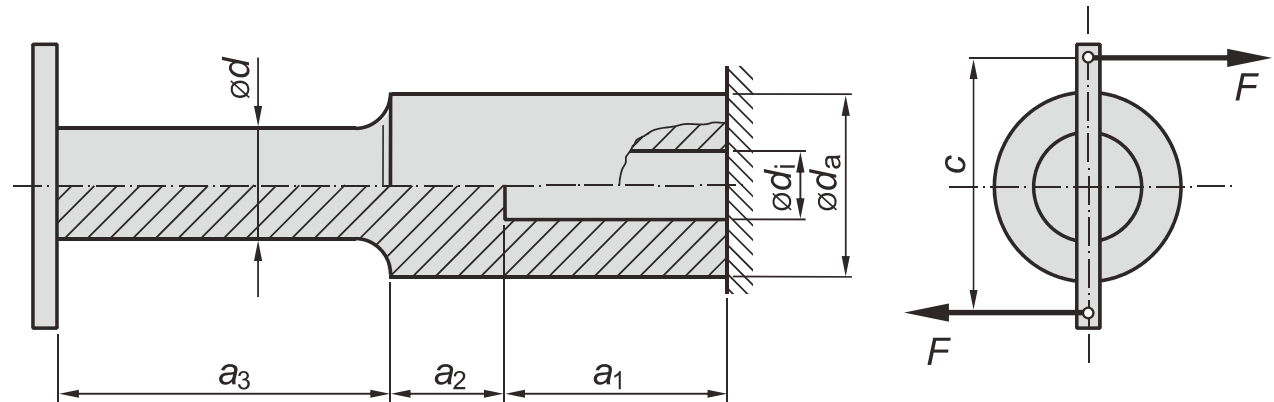
Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 1140 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1320 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



$$\begin{aligned} a_1 &= 50 \text{ mm} & d_a &= 40 \text{ mm} \\ a_2 &= 25 \text{ mm} & d_i &= 15 \text{ mm} \\ a_3 &= 65 \text{ mm} & d &= 25 \text{ mm} \\ c &= 80 \text{ mm} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die Kräfte F , die erforderlich sind, um den Stab um $2,5^\circ$ zu verdrehen.
- Ermitteln Sie für die in Aufgabenteil a) berechnete Kraft F die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) in den einzelnen Abschnitten des Stabes.

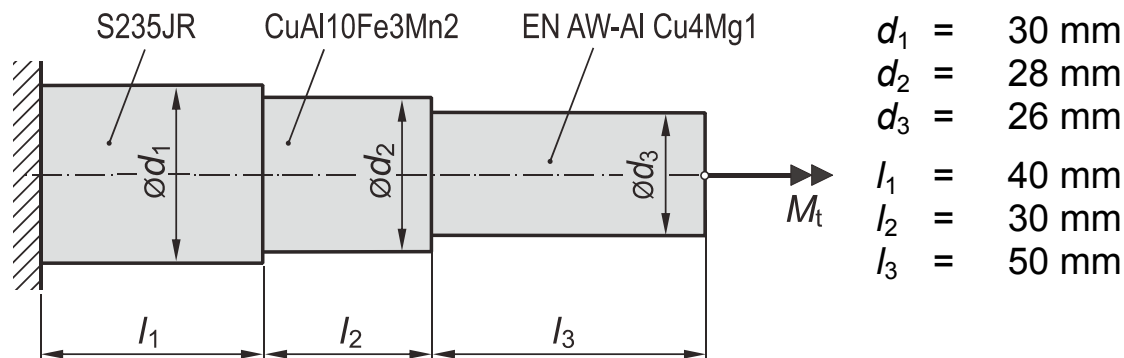
Grundbelastungsarten

Aufgabe 2.35



Zu Versuchszwecken wurde der abgebildete, abgesetzte Torsionsstab mit Vollkreisquerschnitt entwickelt. Die einzelnen Abschnitte setzen sich aus unterschiedlichen Werkstoffen zusammen.

Werkstoff	R_e bzw. $R_{p0,2}$ N/mm ²	R_m N/mm ²	E N/mm ²	μ
S235JR	240	450	210000	0,30
CuAl10Fe3Mn2	330	590	108000	0,34
EN AW-Al Cu4Mg1-T6	350	560	68000	0,33



$$\begin{aligned}
 d_1 &= 30 \text{ mm} \\
 d_2 &= 28 \text{ mm} \\
 d_3 &= 26 \text{ mm} \\
 l_1 &= 40 \text{ mm} \\
 l_2 &= 30 \text{ mm} \\
 l_3 &= 50 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Ermitteln Sie das zulässige Torsionsmoment $M_{t \text{ zul}}$ sowie den zulässigen Verdrehwinkel φ_{zul} des Torsionsstabes, so dass Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann. Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie an den Stellen der Querschnittsveränderung ist zu vernachlässigen.

Grundbelastungsarten

Zusammenfassung der Grundbelastungsarten

Belastungsart	Spannungsverteilung	Mohrscher Spannungskreis ¹⁾	Grundgleichung	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwerte ²⁾
Zug			$\sigma_z = \frac{F_z}{A}$	Duktiler Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Fließen: R_e oder R_p ³⁾ • Bruch: R_m Spröder Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: R_m 	---- ---- ----	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$
Druck			$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$	Duktiler Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Fließen: σ_{dF} oder σ_{dp} ⁴⁾ • Knickung: $\sigma_K = F_K / A$ Spröder Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: σ_{dB} • Knickung: $\sigma_K = F_K / A$ 	R_e oder R_p ---- ---- ----	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_K = 2,5 \dots 5,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$ $S_K = 2,5 \dots 5,0$
Biegung			$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$	Duktiler Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Fließen: σ_{bF} Spröder Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: σ_{bB} 	R_e oder R_p ⁵⁾ 6)	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$
Schub (Abscherung)			$\tau_a = \frac{F_a}{A}$	Duktiler Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: τ_{aB} Spröder Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: τ_{aB} 	$0,6 \dots 0,9 \cdot R_m$ ⁷⁾ $\approx R_m$ ⁸⁾	$S_B = 2,0 \dots 4,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$
Torsion			$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$	Duktiler Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Fließen: τ_{tF} • Bruch: τ_{tB} Spröder Werkstoff: <ul style="list-style-type: none"> • Bruch: τ_{tB} 	$R_e/2$ oder $R_p/2$ $0,6 \dots 0,9 \cdot R_m$ ⁹⁾ R_m	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Erläuterung des Mohrschen Spannungskreises siehe Kapitel 3.

²⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

³⁾ In der Regel 0,2%-Dehngrenze ($R_{p0,2}$)

⁴⁾ In der Regel 0,2%-Stauchgrenze ($\sigma_{d0,2}$)

⁵⁾ Mitunter auch $1,1 \dots 1,2 \cdot R_e$ bzw. $1,1 \dots 1,2 \cdot R_{p0,2}$

⁶⁾ Für ideal spröde Werkstoffe: $\sigma_{bB} \approx R_m$; für spröde metallische Werkstoffe: $\sigma_{bB} > R_m$, insbesondere für Gusseisen mit Lamellengraphit: $\sigma_{bB} = 2,0 \dots 2,5 \cdot R_m$

⁷⁾ Faktor 0,6 für hochfeste Werkstoffe, Faktor 0,9 für niedrigfeste Werkstoffe. Insbesondere für Stähle mit $R_m \leq 1800 \text{ N/mm}^2$: $\tau_{aB} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$ bzw. $\tau_{tB} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$

⁸⁾ Gültig für Gusseisen mit Lamellengraphit.

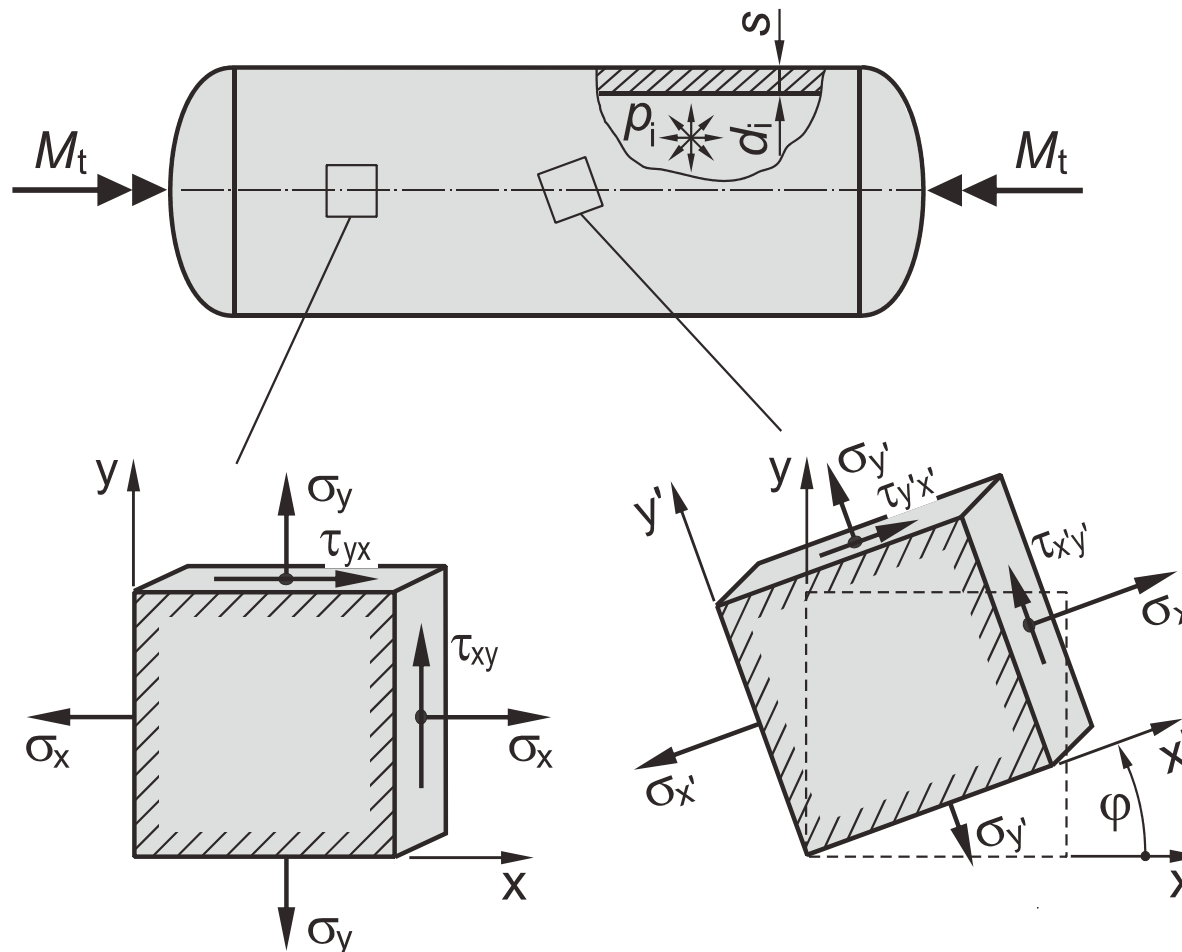
Kapitel 3

Spannungszustand

Spannungszustand

Spannungsbegriff - Problemstellung und Lernziel

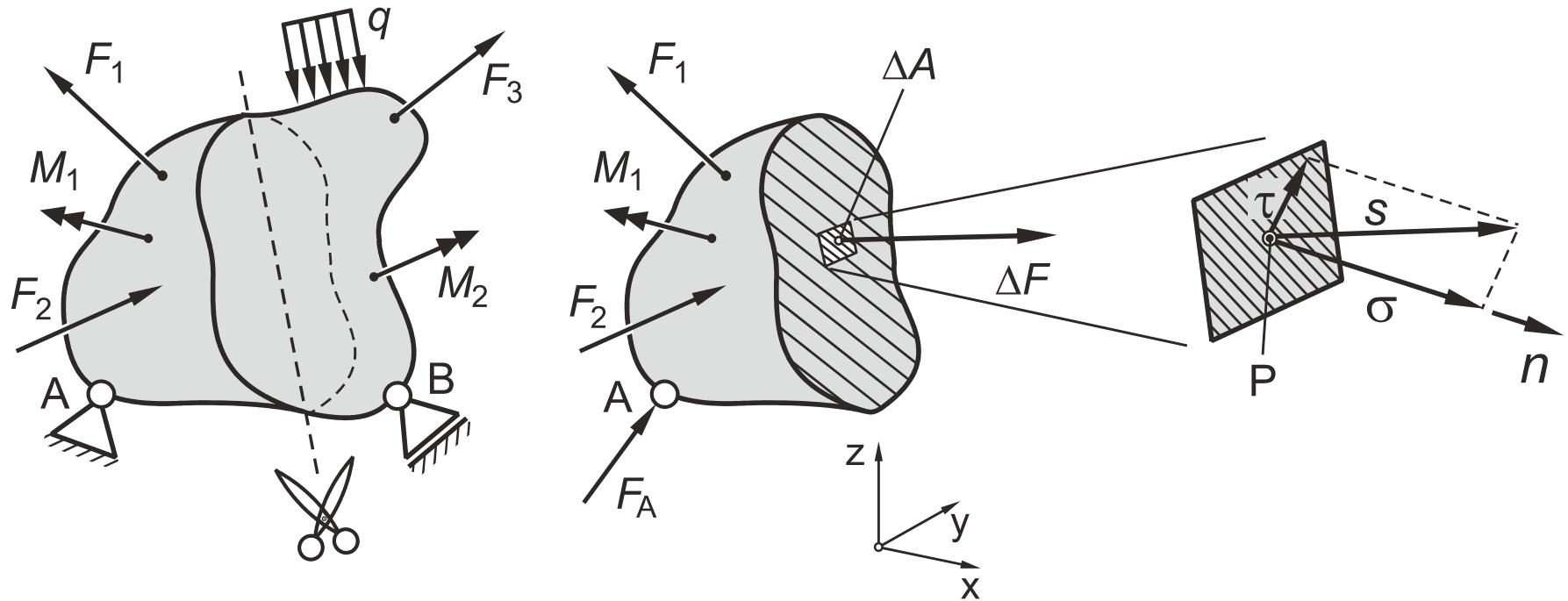
Lernziel: Spannungsermittlung in beliebigen Schnittebenen (z. B. Berechnung von $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'}$) ausgehend von einem bekannten Spannungszustand (z. B. gekennzeichnet durch σ_x , σ_y und τ_{xy})



Spannungszustand

Spannungsbegriff (allgemein)

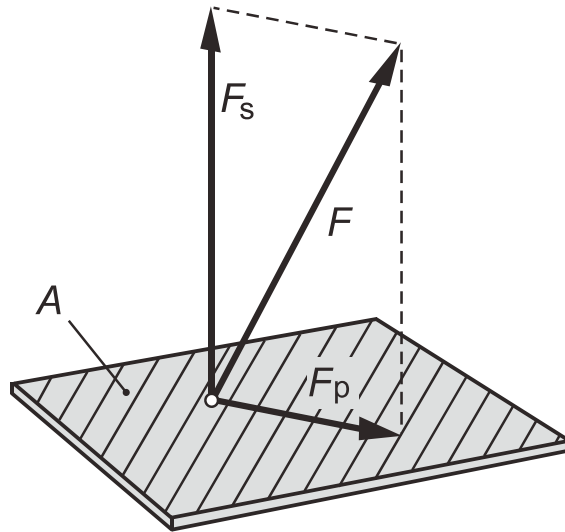
Definition der mechanischen Spannung: $\vec{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$



Spannungszustand

Normal- und Schubspannungen

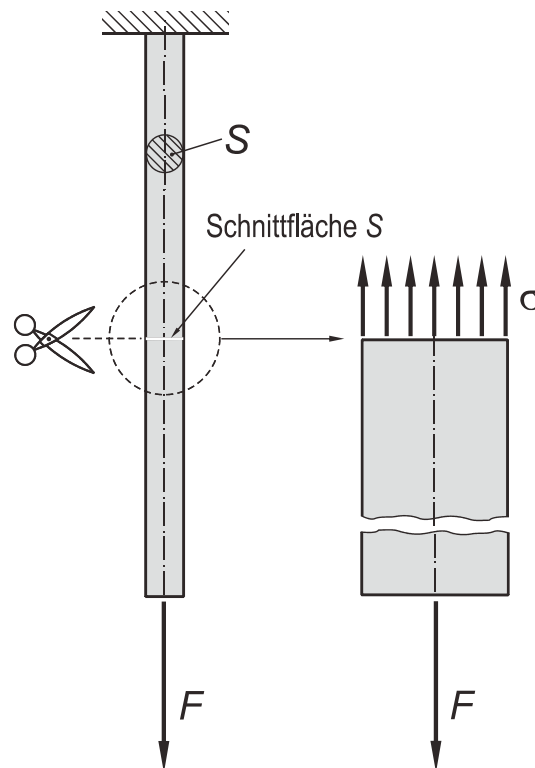
Definition



Normalspannung σ

$$\sigma = \frac{F_s}{A}$$

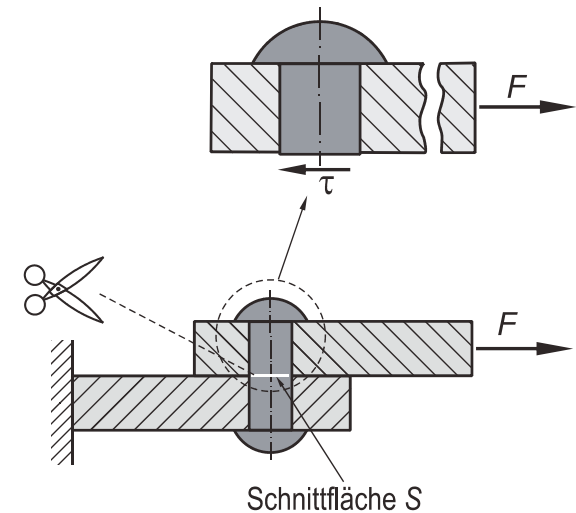
Beispiel: Zugstab



Schubspannung τ

$$\tau = \frac{F_p}{A}$$

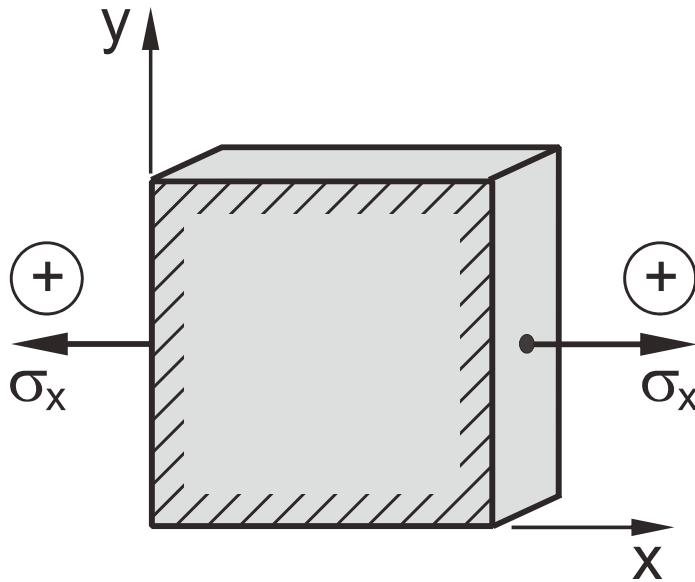
Beispiel: Nietverbindung



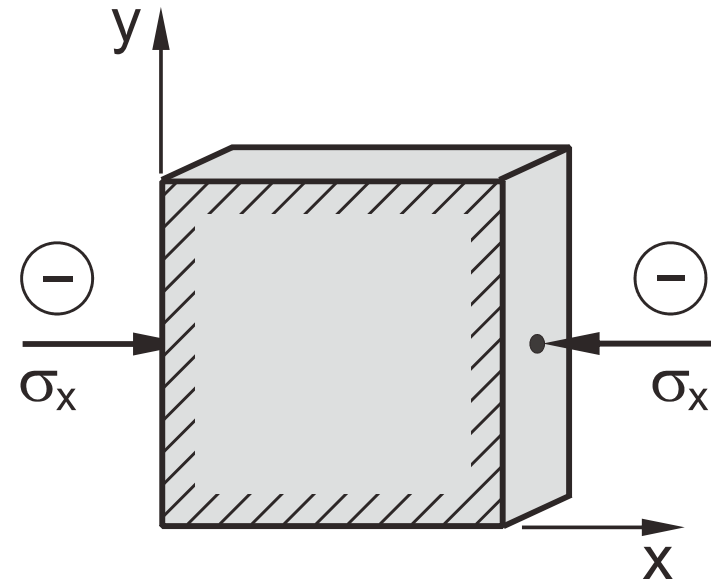
Spannungszustand

Vorzeichenregelung für Normalspannungen

Zug: positiv



Druck negativ

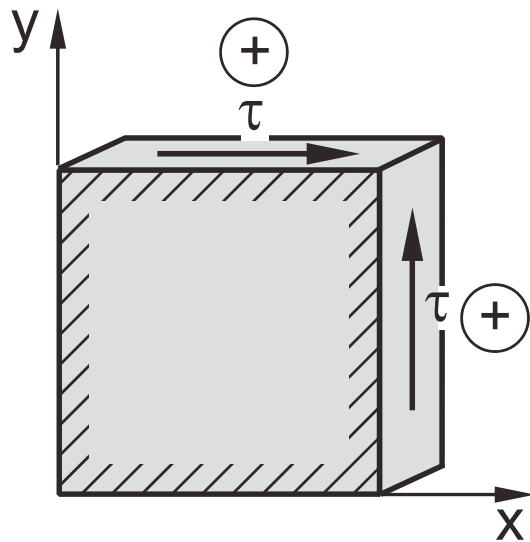


Spannungszustand

Vorzeichenregelung für Schubspannungen

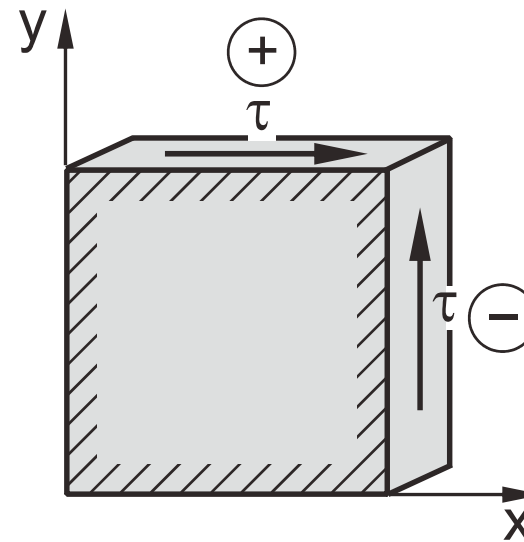
Allgemeine Vorzeichenregelung

Eine Schubspannung ist positiv, wenn sie in Schnittebenen mit Normalenvektor in positiver Achsrichtung liegt und ihre Richtung mit einer positiven Achsrichtung zusammenfällt.



Spezielle Vorzeichenregelung (für die graphische Darstellung des Mohrschen Spannungskreises)

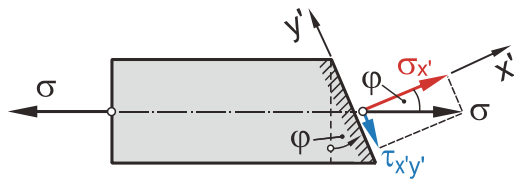
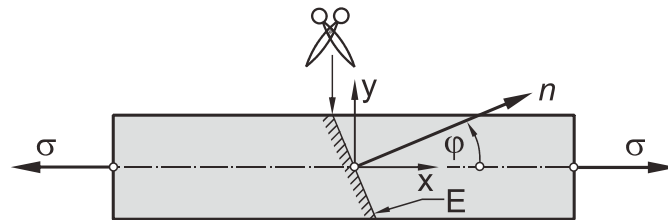
Eine Schubspannung ist positiv anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts von der Schubspannung liegt.



Spannungszustand

Einachsiger Spannungszustand

Normal- und Schubspannungen in Abhängigkeit der Schnittrichtung



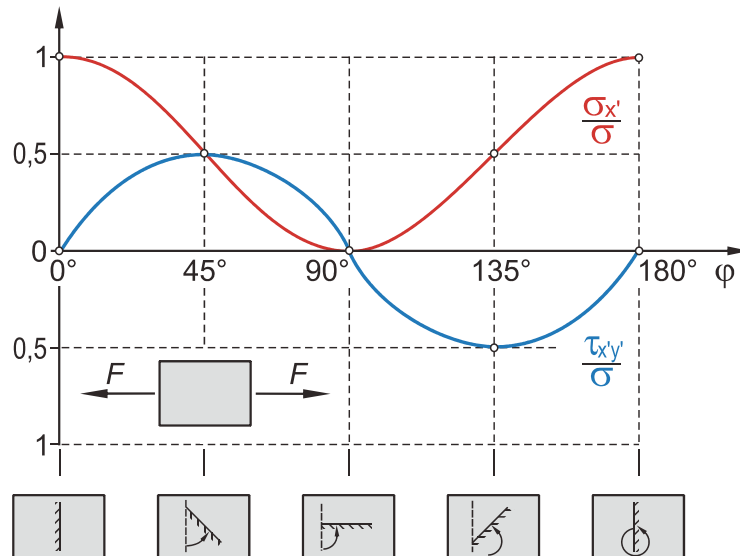
Anwendung des Schnittprinzips und Ansetzen des Kräftegleichgewichts.

Normalspannung in der Schnittebene E , deren Normalenvektor mit der x -Richtung den Winkel φ einschließt bei einachsigem Spannungszustand:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

Schubspannung in der Schnittebene E , deren Normalenvektor mit der x -Richtung den Winkel φ einschließt bei einachsigem Spannungszustand:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi$$



Spannungszustand

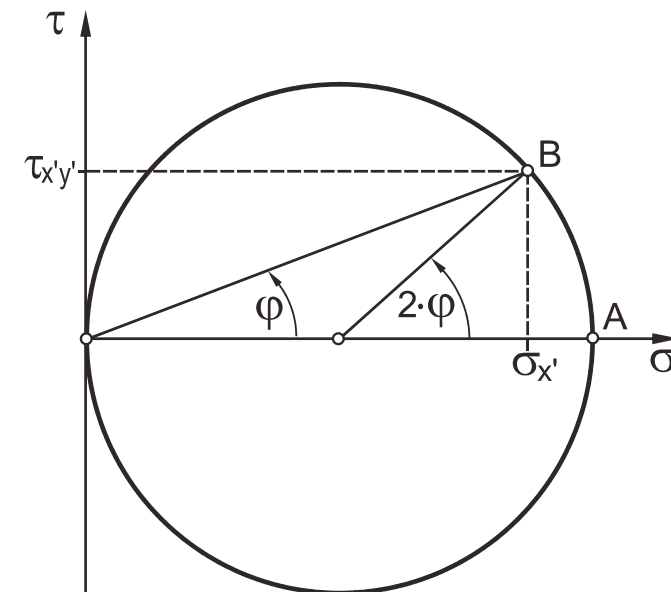
Mohrscher Spannungskreis bei einachsigen Spannungszustand

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \quad \tau_{x'y'} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

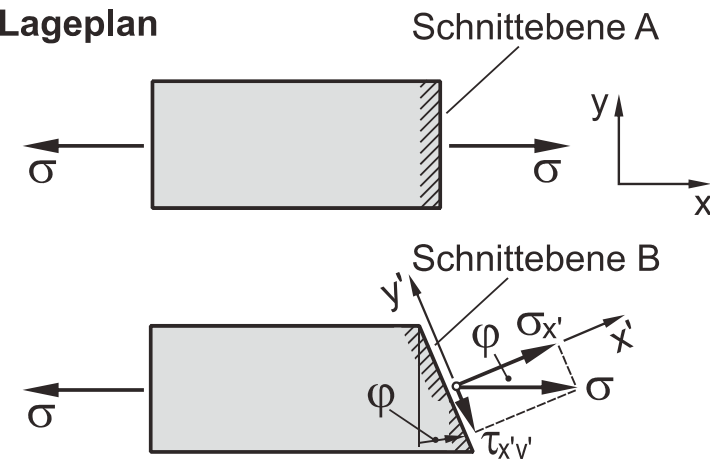
Quadrieren und addieren der Gleichungen aus Folie 3-7 liefert die Gleichung des **Mohrschen Spannungskreises** in der σ - τ -Ebene bei einachsigen Spannungszustand:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2$$

Mohrscher Spannungskreis



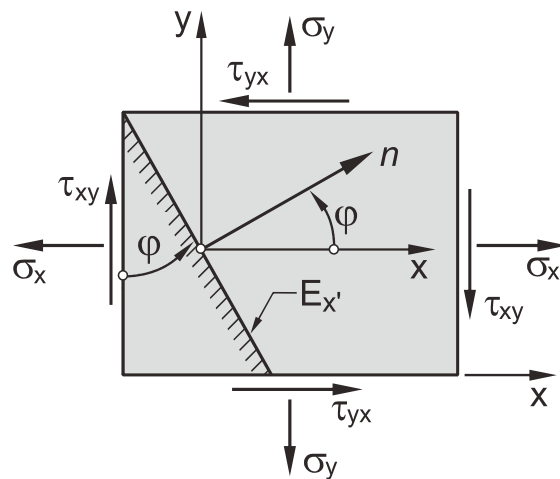
Lageplan



Spannungszustand

Zweiachsiger Spannungszustand

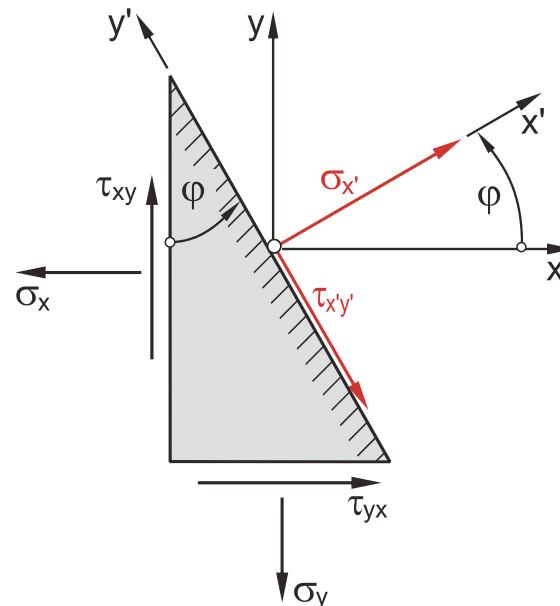
Normal- und Schubspannungen in Abhängigkeit der Schnittrichtung



Anwendung des Schnittprinzips und Ansetzen des Kräftegleichgewichts.

Normalspannung in der Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$



Schubspannung in der Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Hinweis:

Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Folie 3-6) in obige Gleichungen einsetzen.

Spannungszustand

Mohrscher Spannungskreis bei zweiachsigem Spannungszustand

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Quadrieren und addieren der Gleichungen aus Folie 3-9 liefert die Gleichung des **Mohrschen Spannungskreises** in der σ - τ -Ebene bei zweiachsigem Spannungszustand:

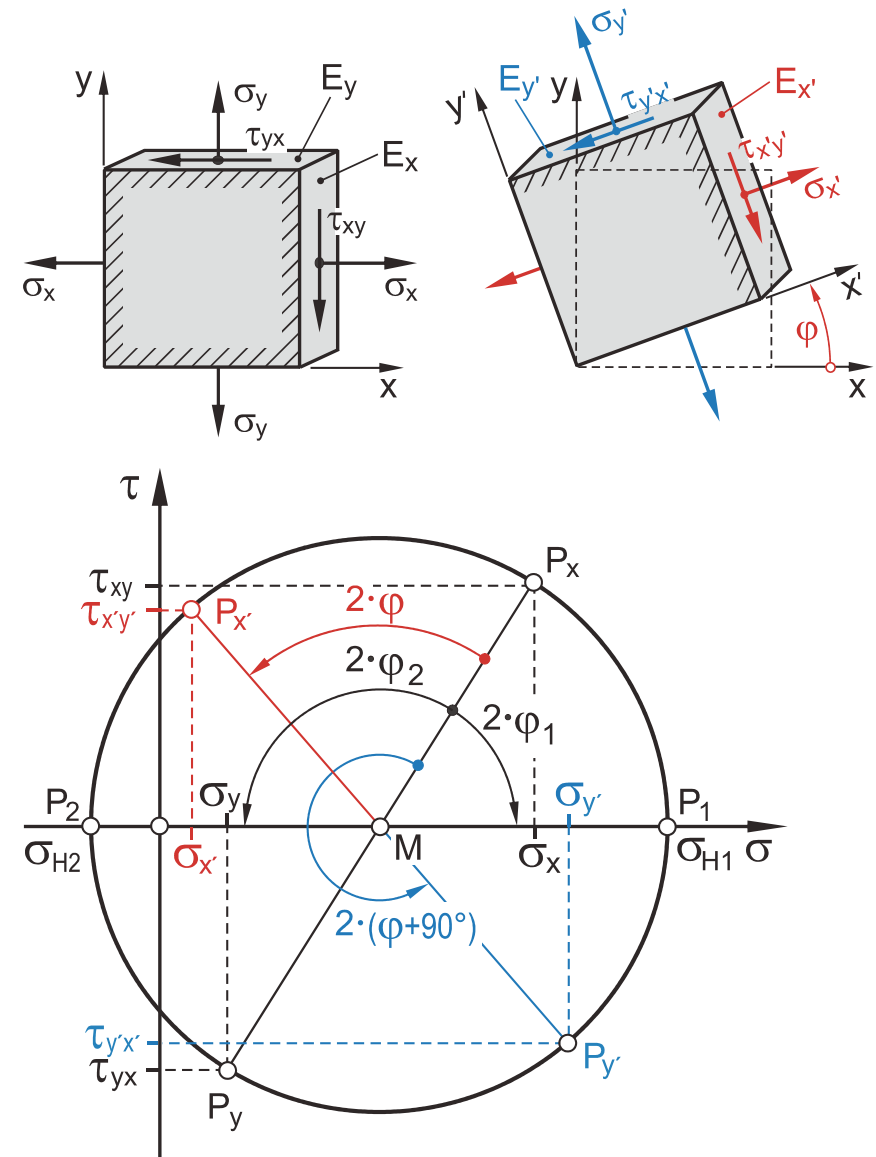
$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises:

$$M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mid 0 \right)$$

Radius des Mohrschen Spannungskreises:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Spannungszustand

Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

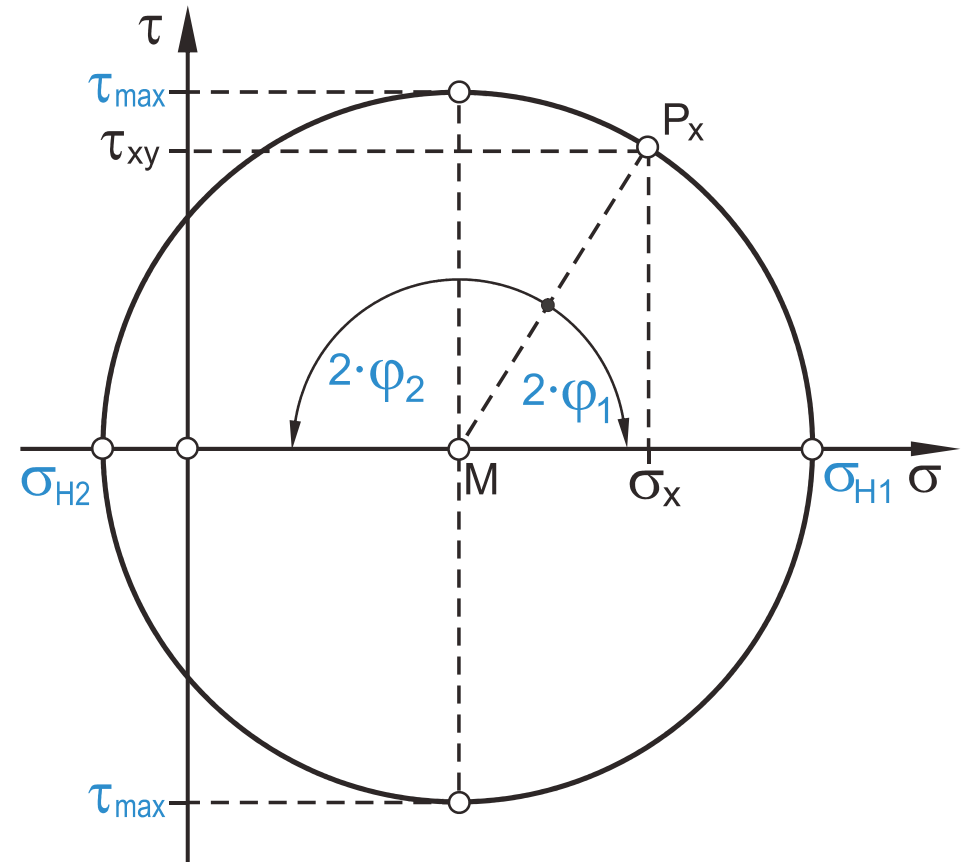
Haupt(normal)spannungsrichtungen:

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2}$$

Hauptschubspannungen:

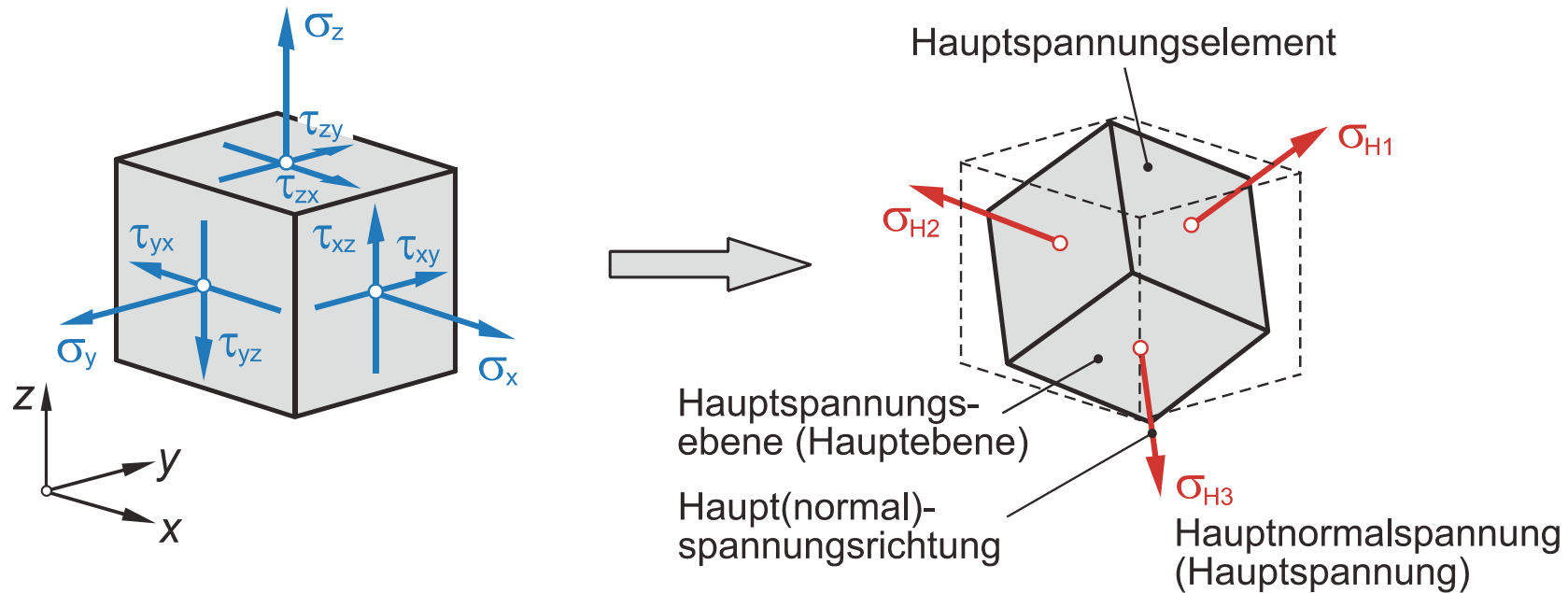
$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}$$



Spannungszustand

Dreiachsiger Spannungszustand

Spannungskomponenten bei dreiachsigem Spannungszustand

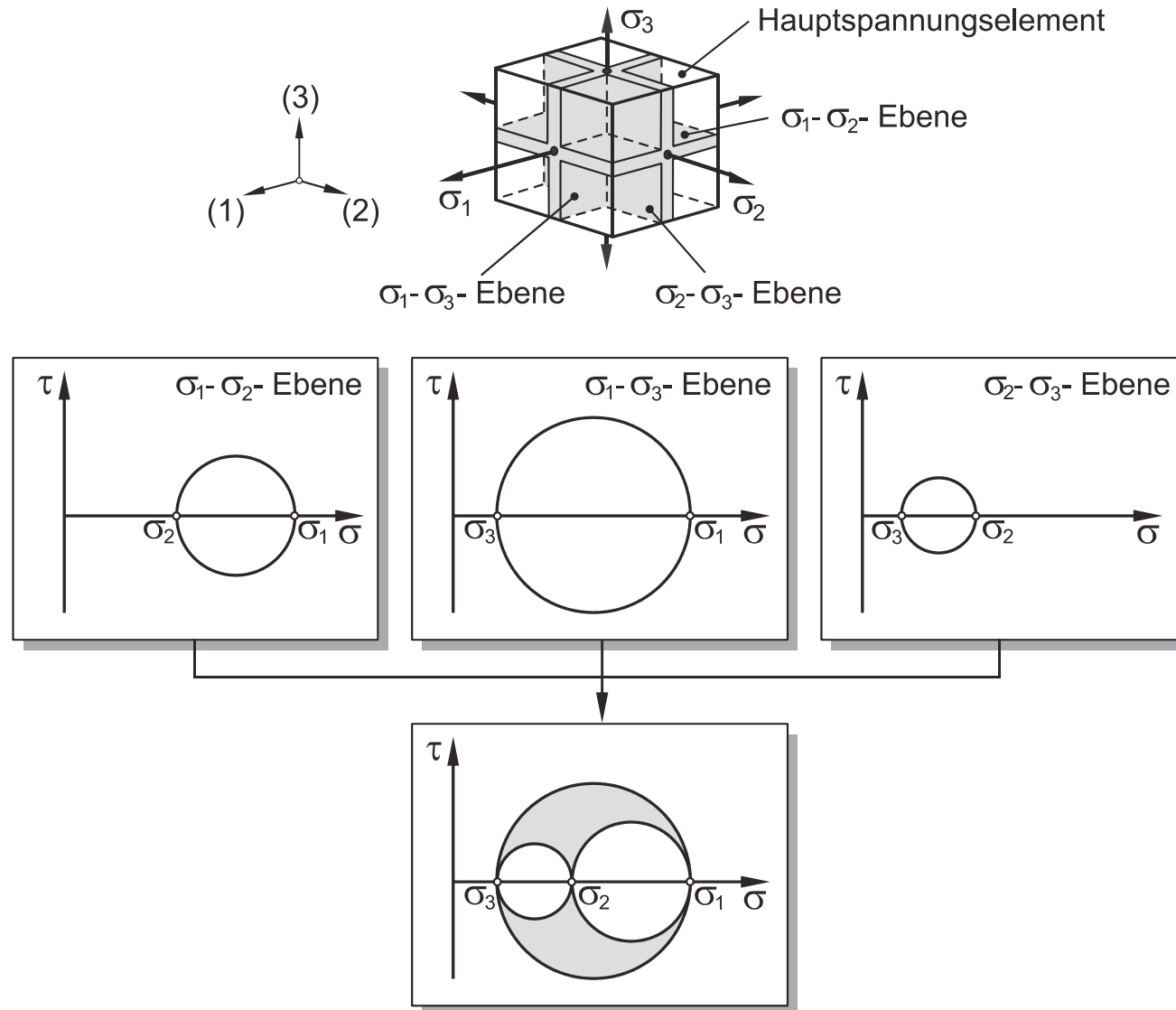


Im Falle eines dreiachsigen Spannungszustandes ist es sinnvoll, den **Spannungstensor** für die zu untersuchende Stelle aufzustellen.

Mit Hilfe des Spannungstensors ist es möglich, die Hauptnormalspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} zu berechnen und somit einen Festigkeitsnachweis für die betrachtete Stelle zu führen. Die Vorgehensweise wird im Lehrbuch (S. 78 ff.) ausführlich beschrieben.

Spannungszustand

Mohrscher Spannungskreis für den dreiachsigen Spannungszustand



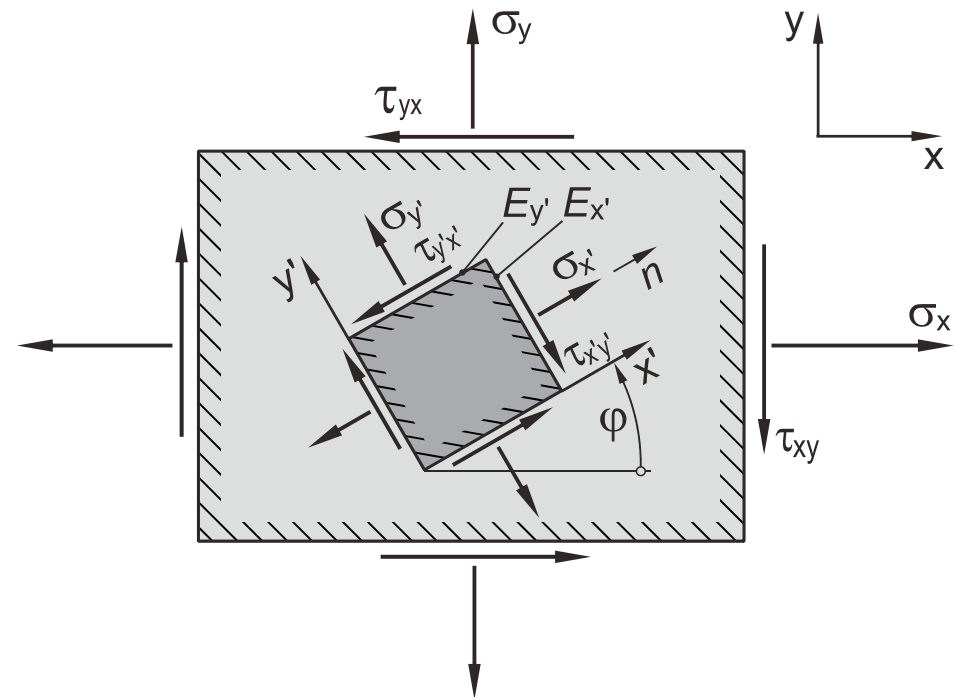
Spannungszustand

Aufgabe 3.1



Die Abbildung zeigt ein durch die Spannungen $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2$ und $\tau_{xy} = 75 \text{ N/mm}^2$ zweiachsig beanspruchtes Scheibenelement aus Werkstoff S235JR.

- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Spannungskreis in der x-y-Ebene.
- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} sowie die Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen.
- Ermitteln Sie die Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in der Schnittebene $E_{x'}$ sowie $\sigma_{y'}$ und $\tau_{y'x'}$ in der Schnittebene $E_{y'}$ eines um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ zur x-Richtung gedrehten Flächenelementes (siehe Abbildung).



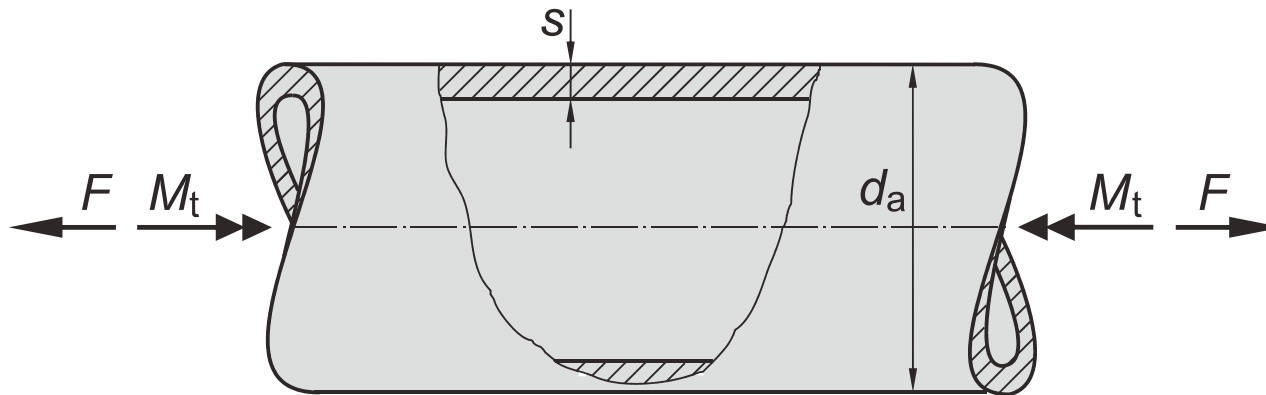
Spannungszustand

Aufgabe 3.2



Ein Stahlrohr mit einem Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$ und einer Wandstärke $s = 10 \text{ mm}$ wird gleichzeitig durch die Zugkraft $F = 425 \text{ kN}$ und das Torsionsmoment $M_t = 9250 \text{ Nm}$ statisch beansprucht.

- Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die höchst beanspruchte Stelle.
- Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen, die Hauptschubspannungen und die jeweiligen Richtungswinkel zur x-Achse.



Spannungszustand

Aufgabe 3.4



Die Abbildung zeigt das Maschinengestell für eine Einpressvorrichtung aus dem Gusseisenwerkstoff EN-GJL-350 (alle Maßangaben in mm). Das Maschinengestell wird durch die statisch wirkenden Arbeitskräfte F belastet.

Zur Ermittlung der unbekannten Arbeitskräfte F wird in der Säulenmitte ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert. Aufgrund einer Montageungenauigkeit schließt die Messrichtung des DMS einen Winkel von 10° zur Säulenlängsachse ein.

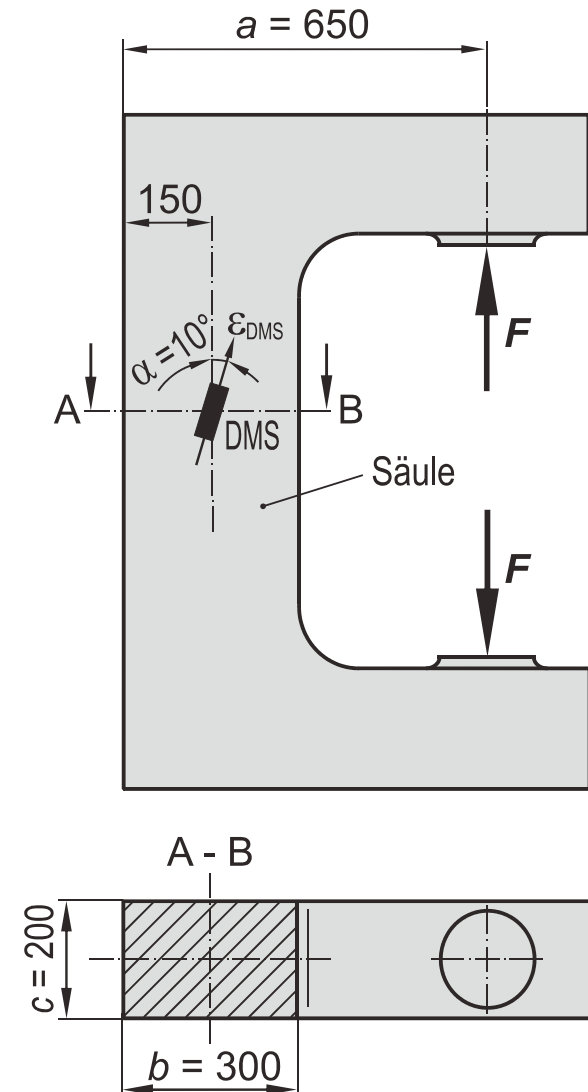
Werkstoffkennwerte EN-GJL-350:

$$R_m = 350 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 108000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$

- Auf welche Weise wird der Querschnitt A-B durch die Arbeitskräfte F beansprucht?
- Ermitteln Sie den Betrag der Arbeitskräfte F für eine Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{\text{DMS}} = 0,1485 \text{ ‰}$.
- Ermitteln Sie für die höchst beanspruchte Stelle (im Querschnitt A-B) die Sicherheit gegen Bruch. Ist die Sicherheit ausreichend?



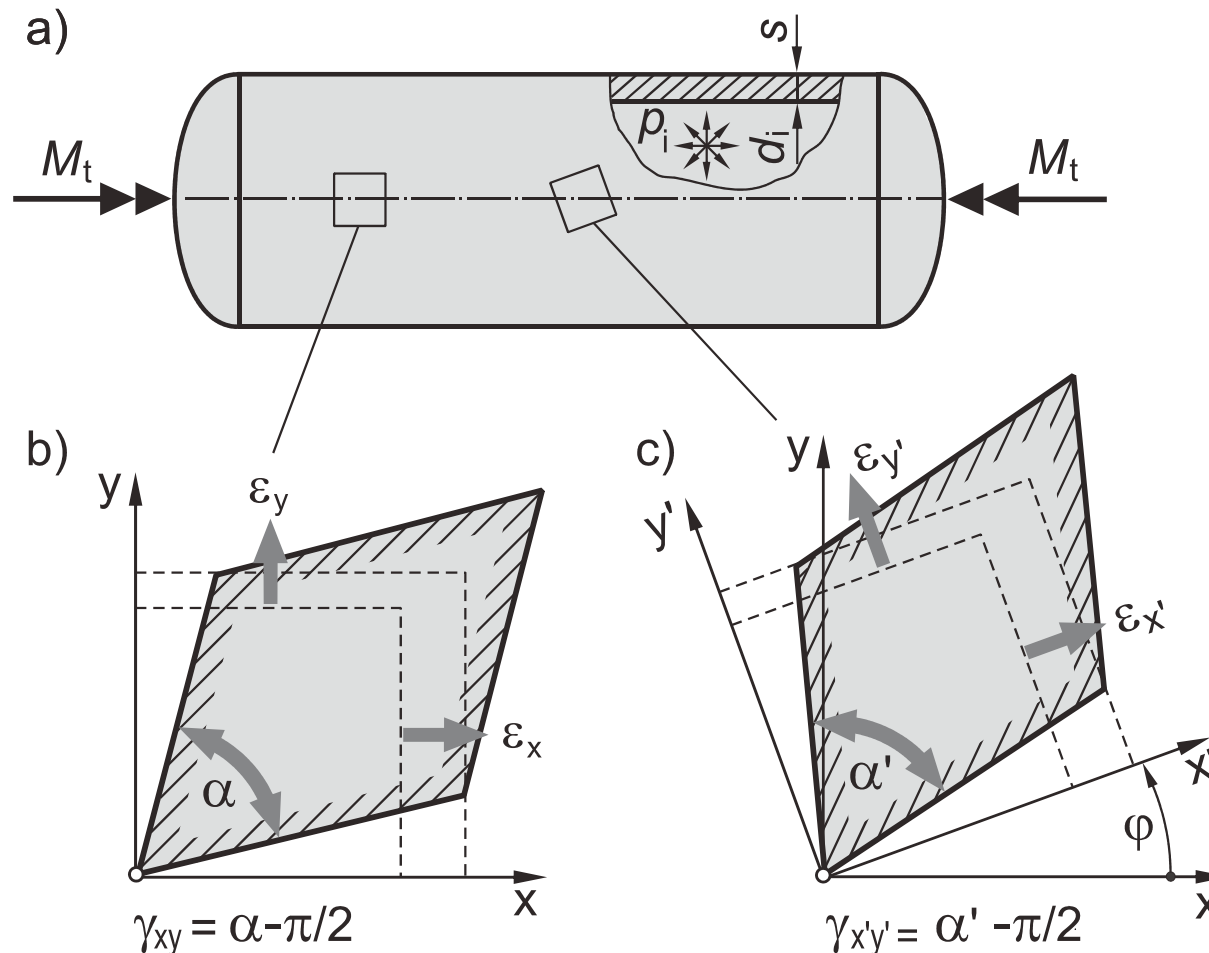
Kapitel 4

Verformungszustand

Verformungszustand

Verformungszustand - Problemstellung und Lernziel

Lernziel: Ermittlung der Verformung in beliebigen Schnittebenen (z. B. Berechnung von $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$ und $\gamma_{x'y'}$) ausgehend von einem bekannten Verformungszustand (z. B. vorgegeben durch ε_x , ε_y und γ_{xy})



Verformungszustand

Dehnung und Schiebung (Winkelverzerrung)

Definition

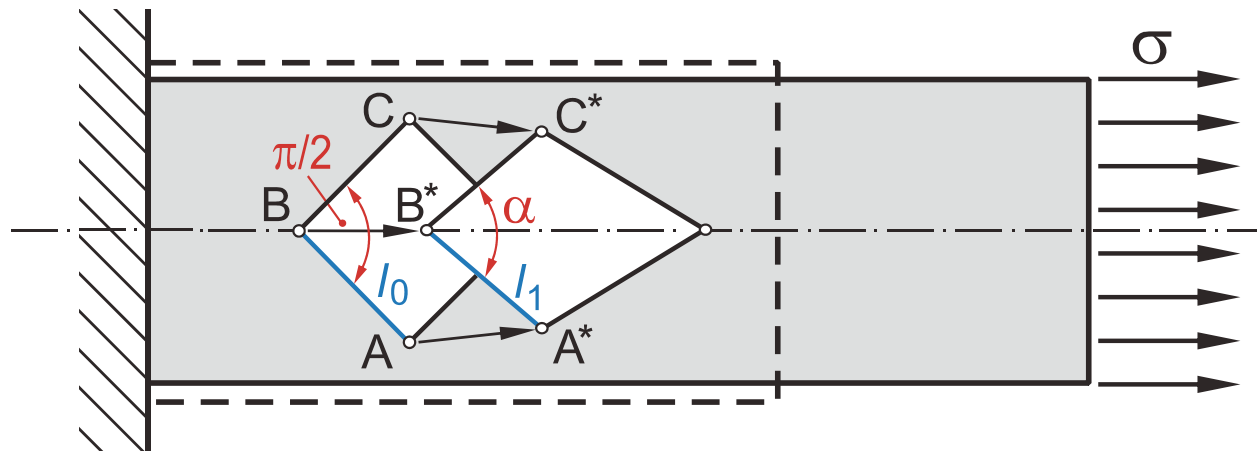
Dehnung ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

Schubspannung γ

$$\gamma = \angle A^* B^* C^* - \angle ABC = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Beispiel: Zugstab

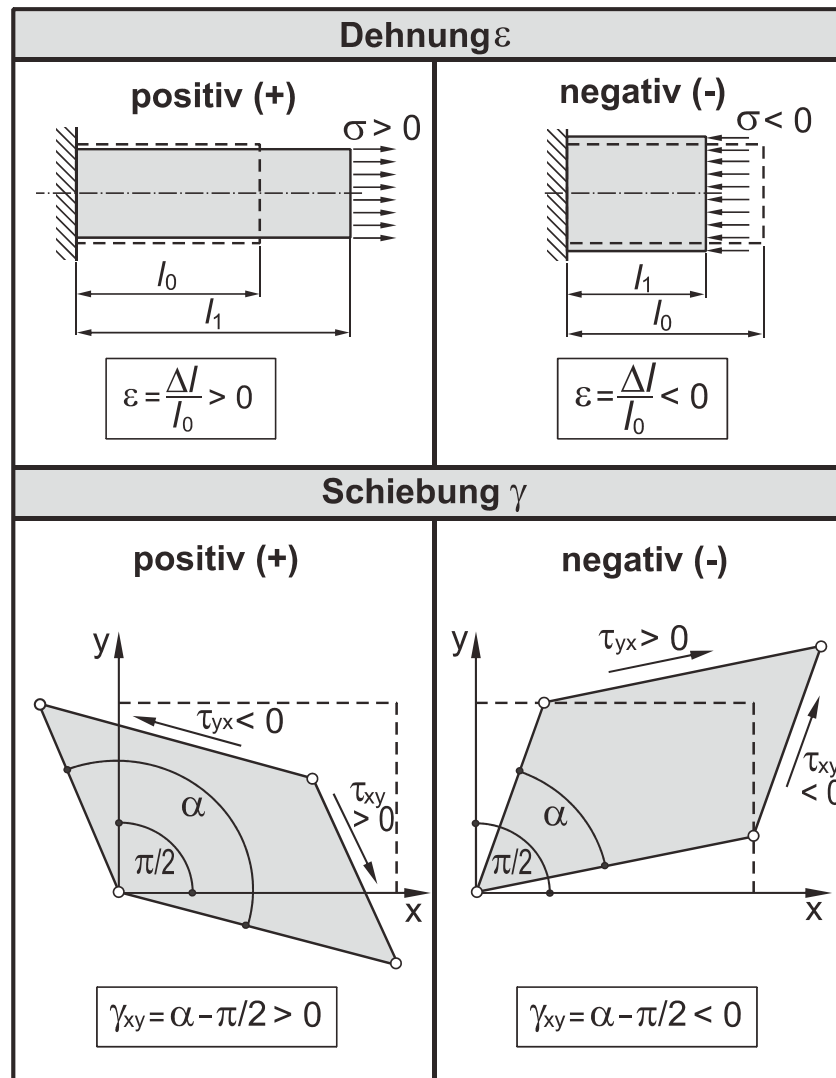


Der mitunter auch verwendete Begriff „**Gleitung**“ soll nach DIN 13316 nicht angewandt werden, da dieser Begriff bleibenden Verformungen vorbehalten ist.

Verformungszustand

Dehnung und Schiebung (Winkelverzerrung)

Vorzeichenregelung



Dehnung:

Verlängert sich ein betrachtetes Linienelement ($l_1 > l_0$), dann wird die Dehnung positiv angesetzt, verkürzt es sich hingegen, dann ist die Dehnung negativ (**Stauchung**).

Schiebung:

Für die Lösung *ebener Probleme* ist es zweckmäßig, das Vorzeichen der Schiebung γ positiv anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des Winkелеlements vergrößert. Verkleinert sich der Winkel hingegen, dann ist die Schiebung negativ anzusetzen.

Bei der Anwendung dieser Vorzeichendefinition für Schiebungen werden positiven Schubspannungen (definiert gemäß der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen) positive Schiebungen zugeordnet (und umgekehrt).

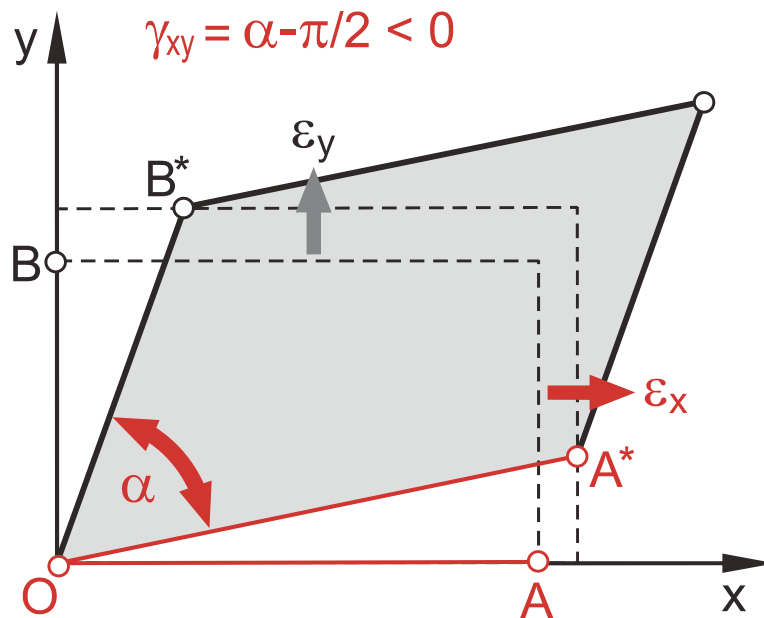
Verformungszustand

Indizierung

Beispiel 1:

Das Linienelement OA zeigt in x -Richtung. Eine Dehnung dieses Linienelementes ($OA \rightarrow OA^*$) wird dementsprechend mit ε_x bezeichnet.

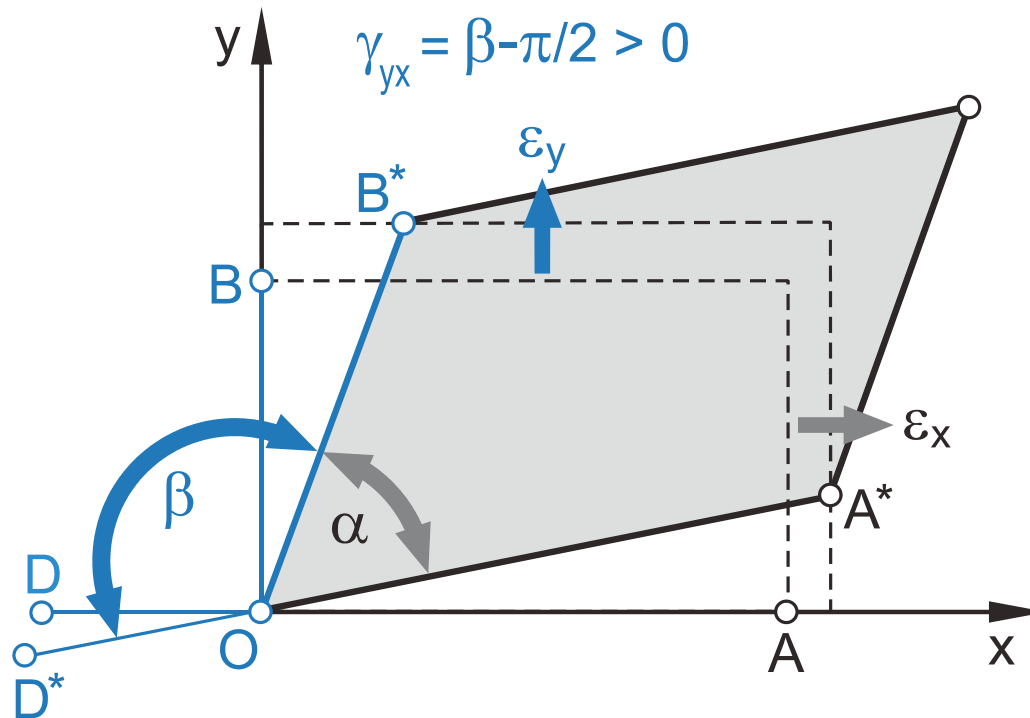
Die zugehörige Schiebung mit der x -Richtung als Bezugsrichtung wird mit γ_{xy} bezeichnet. Der 1. Index kennzeichnet dabei die Bezugsrichtung (hier: x -Richtung) der 2. Index die Koordinatenrichtung die sich ausgehend von der Bezugsrichtung bei Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um 90° ergibt. Hier also die y -Richtung. Da sich (im dargestellten Beispiel) der ursprüngliche rechte Winkel ($\angle AOB$) verkleinert, ist γ_{xy} **negativ** anzusetzen.



Verformungszustand

Beispiel 2:

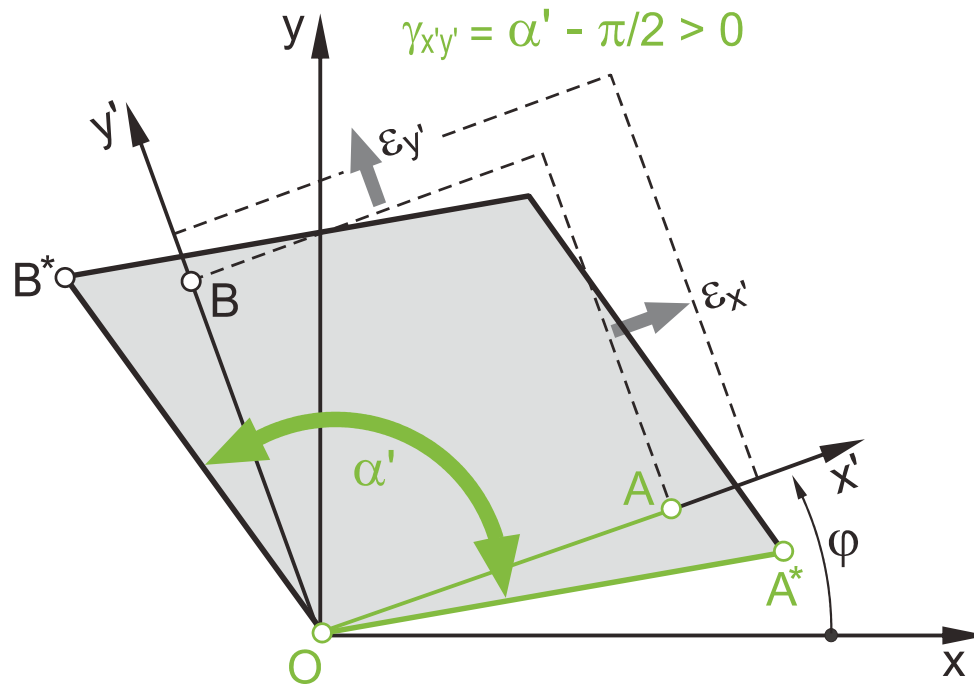
Das Linienelement OB zeigt in y -Richtung. Die Dehnung dieses Linienelementes ($OB \rightarrow OB^*$) wird dementsprechend mit ε_y bezeichnet. Die zugehörige Schiebung *mit der y -Richtung als Bezug* wird entsprechend der Festlegung in Beispiel 1 mit γ_{yx} bezeichnet ($\gamma_{yx} = \angle B^*OD^* - \angle BOD = \beta - \pi/2$). Da sich der ursprüngliche rechte Winkel ($\angle BOD$) vergrößert, ist γ_{yx} **positiv** anzusetzen.



Verformungszustand

Beispiel 3:

Das Linienelement OA zeigt in x' -Richtung. Die Dehnung dieses Linienelements ($OA \rightarrow OA^*$) wird dementsprechend mit $\varepsilon_{x'}$ bezeichnet. Die zugehörige Schiebung *mit der x' -Richtung als Bezug* wird mit $\gamma_{x'y'}$ bezeichnet ($\gamma_{x'y'} = \alpha' - \pi/2$).



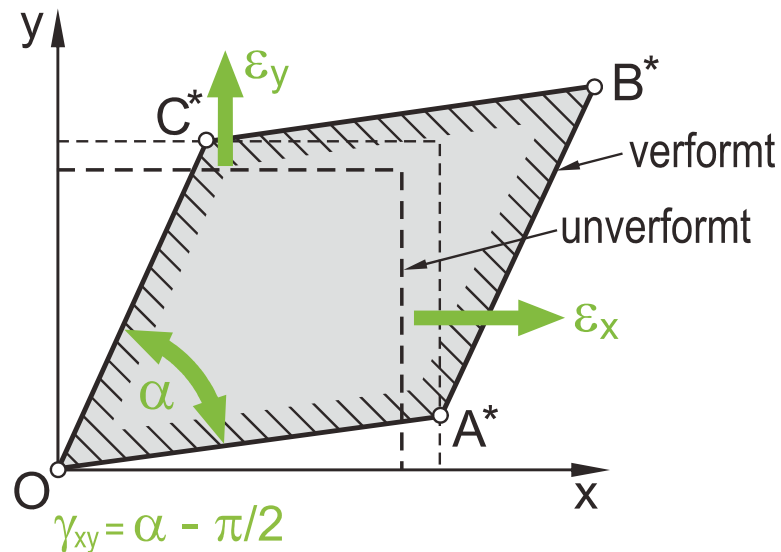
Verformungszustand

Verformungszustand und Schnittrichtung

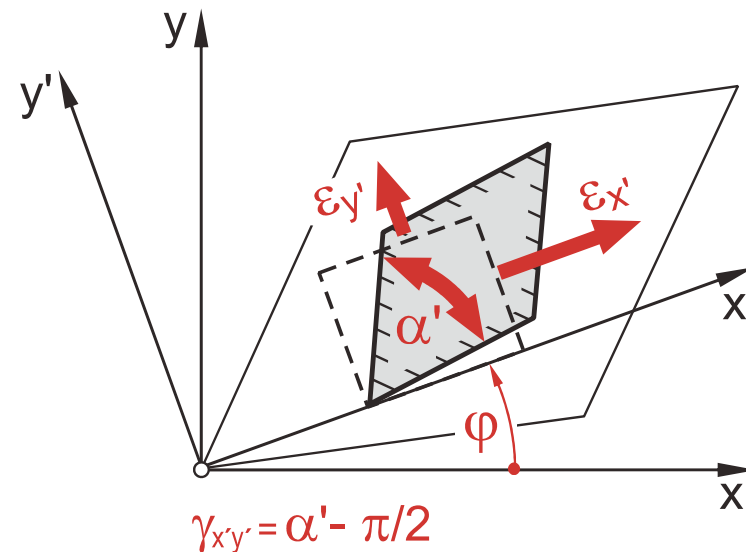
Dehnung und Schiebung in Abhängigkeit der Schnittrichtung

Bekannt sei der Verformungszustand durch die Verformungsgrößen ε_x , ε_y und γ_{xy} . Hierdurch wird das Rechteck deformiert und geht in die Lage $O^*A^*B^*C^*$ über (Translation kann unberücksichtigt bleiben).

Bekannter Verformungszustand (ε_x , ε_y , γ_{xy})



Unbekannter Verformungszustand ($\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$)



Verformungszustand

Die Dehnung $\varepsilon_{x'}$ in x' -Richtung sowie die Schiebung $\gamma_{x'y'}$ mit der x' -Richtung als Bezug in einem um den Winkel φ gedrehten Element errechnet sich dann wie folgt:

Dehnung in x' -Richtung:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Schiebung mit der x' -Richtung als Bezug:

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Hinweis:

Das Vorzeichen von $\gamma_{x'y'}$ ist entsprechend der Vorzeichenregelung auf Folie 4-4 einzusetzen.

Verformungszustand

Mohrscher Verformungskreis

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Quadrieren und addieren der Gleichungen aus Folie 4-9 liefert die Gleichung des **Mohrschen Verformungskreises** in der ε - $\gamma/2$ -Ebene:

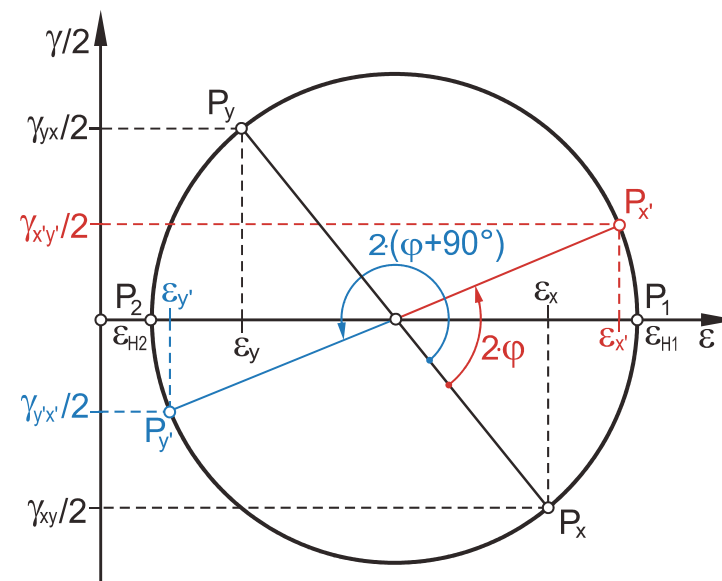
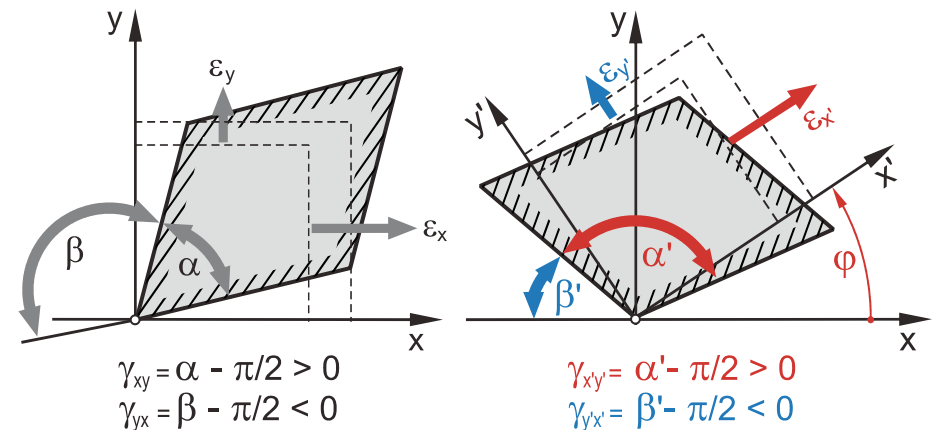
$$\left(\varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

Mittelpunkt des Mohrschen Verformungskreises:

$$M = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \mid 0 \right)$$

Radius des Mohrschen Verformungskreises:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$$



Verformungszustand

Hauptdehnungen:

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

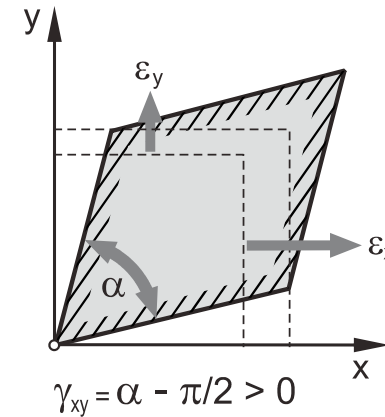
$$\varepsilon_{H2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Hauptdehnungsrichtungen:

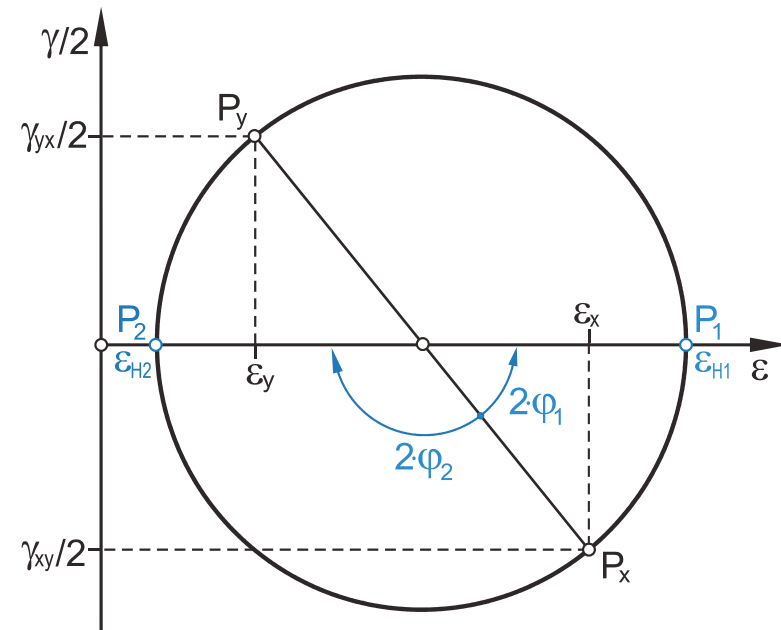
$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2}$$

Gegebener Verformungszustand:



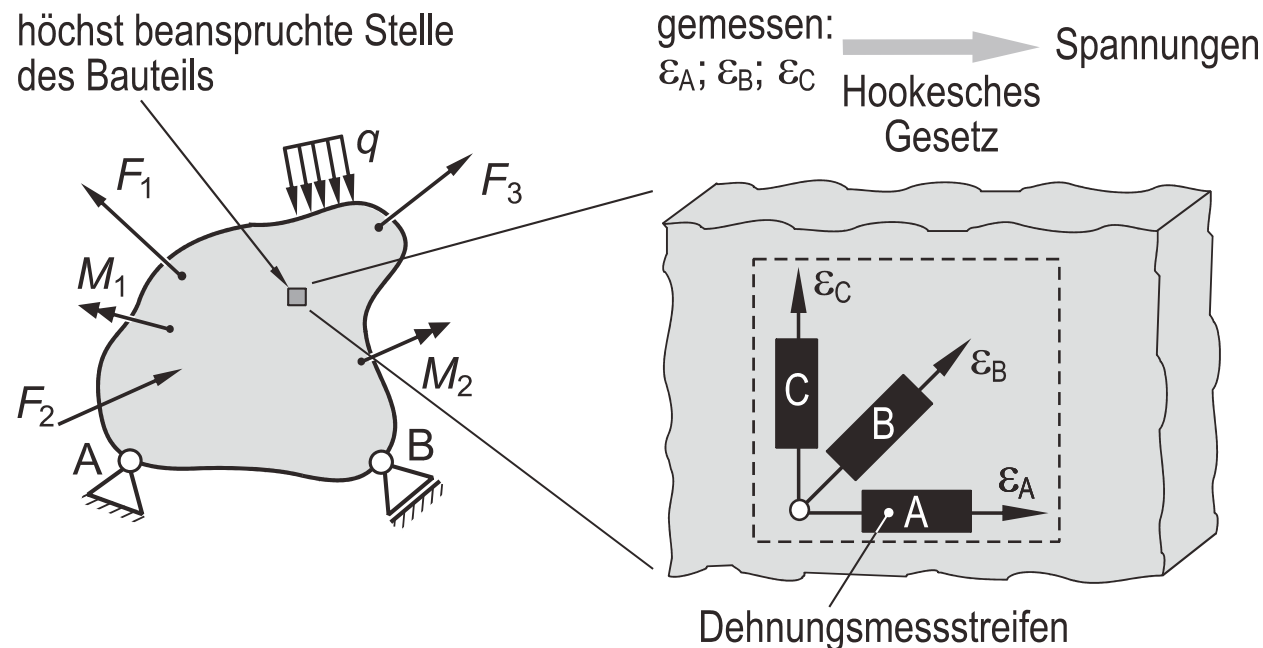
Gesucht: Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen



Verformungszustand

Praktische Anwendung des Mohrschen Verformungskreises

Aufgrund einer komplizierten Bauteilgeometrie sowie einer mitunter komplexen Beanspruchung durch äußere Kräfte oder Momente, können die Lastspannungen und damit der Spannungszustand häufig nur mit einem sehr hohen Berechnungsaufwand ermittelt werden. Zur Lösung des Problems werden im Rahmen einer **experimentellen Spannungsanalyse** an der höchst beanspruchten Stelle der Bauteiloberfläche Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert, um den Verformungszustand zu ermitteln. Bei bekanntem Verformungszustand kann dann der Spannungszustand ermittelt und ein Festigkeitsnachweis geführt werden.



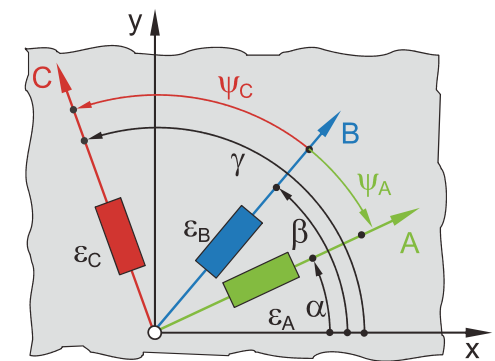
Verformungszustand

1. Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen

Graphisches Verfahren

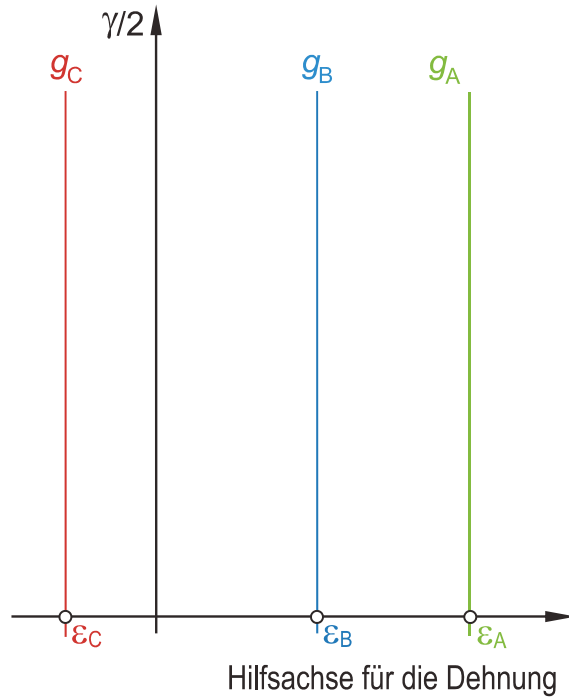
An der Oberfläche eines Bauteils seien die Dehnungen in drei unterschiedliche Richtungen (ε_A , ε_B und ε_C) sowie die Richtungswinkel (α , β , γ) bekannt. Gesucht ist der Mohrsche Verformungskreis.

Lageplan

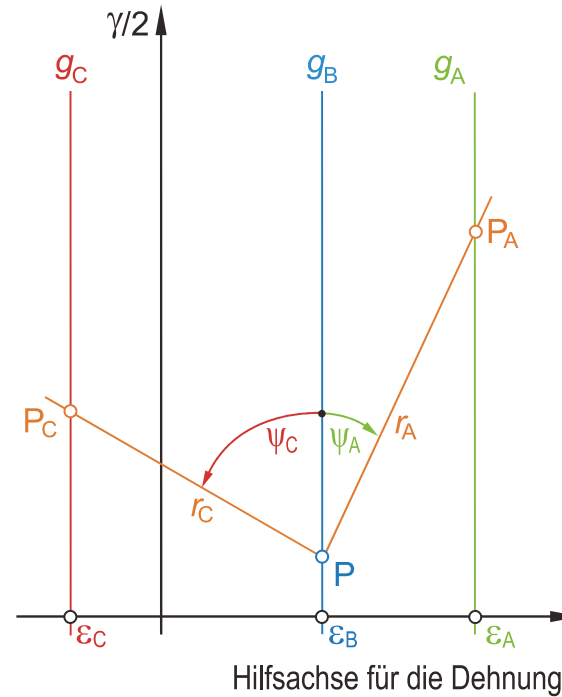


Lösung

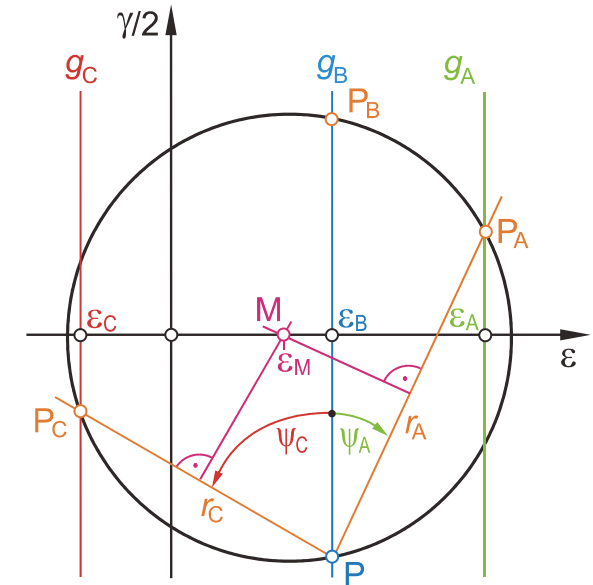
1. Schritt



2. Schritt



3. Schritt



Verformungszustand

Rechnerisches Auswerteverfahren

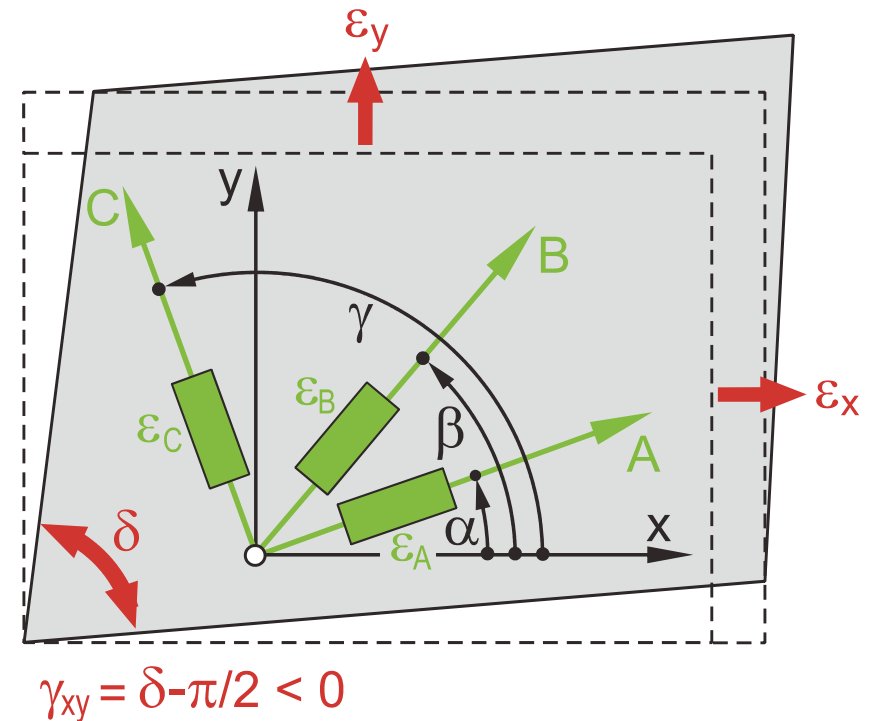
Sind die Richtungswinkel (α, β, γ) und die zugehörigen Dehnungen $(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$ bekannt, dann erhält man für die drei unbekannten Größen $(\varepsilon_x, \varepsilon_y \text{ und } \gamma_{xy})$ ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die drei Unbekannten.

Lösen des Gleichungssystems liefert die gesuchten Verformungsgrößen $(\varepsilon_x, \varepsilon_y \text{ und } \gamma_{xy})$ und damit den Mohrschen Verformungskreis.

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma$$



Verformungszustand

2. Auswertung einer 0°-45°-90° DMS-Rosette

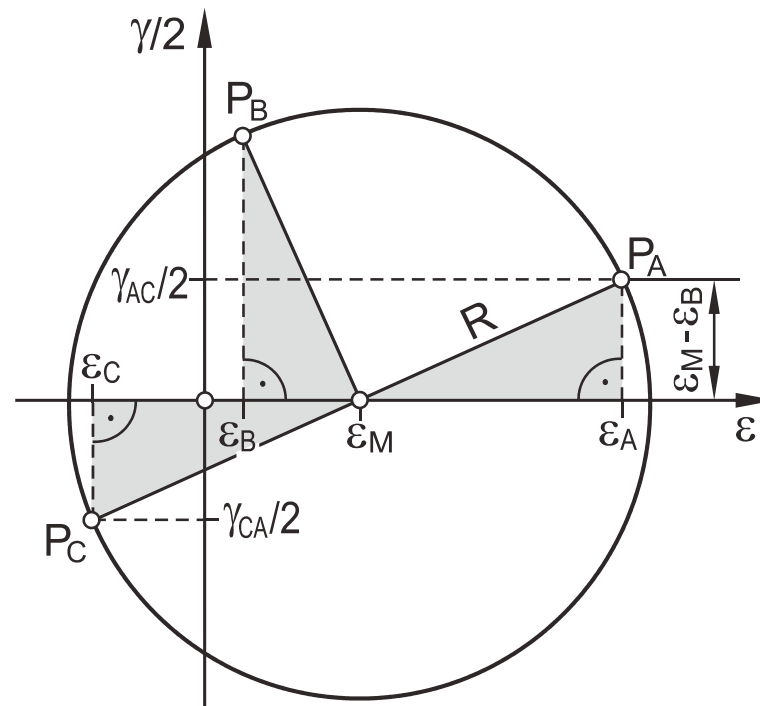
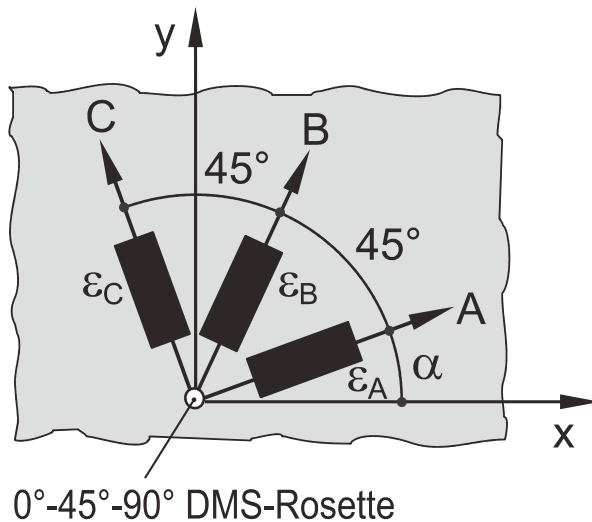
In der Praxis werden im Rahmen experimenteller Spannungsanalysen häufig handelsübliche 0°-45°-90° DMS-Rosetten verwendet. Für diese besonderen Winkel zwischen den Messrichtungen kann der Mohrsche Verformungskreis auf sehr einfache Weise ermittelt werden.

Mittelpunkt des Mohrschen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2}$$

Radius des Mohrschen Verformungskreises

$$R = \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2}$$



Verformungszustand

Grundlagen der Dehnungsmesstechnik

Zur experimentellen Ermittlung der Dehnung stehen unterschiedliche Messverfahren zur Verfügung.

Weit verbreitet und in der Anwendung vergleichsweise einfach, sind technische **Dehnungsmessstreifen** (kurz **DMS**). Eine weite Verbreitung finden hierbei **Folien-Dehnungsmessstreifen**.

Zwischen der Widerstandsänderung des DMS und der Dehnung gilt:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon$$

Der k -Faktor eines Dehnungsmessstreifens (Empfindlichkeit) beträgt in der Regel um 2,0 und wird vom Hersteller angegeben.

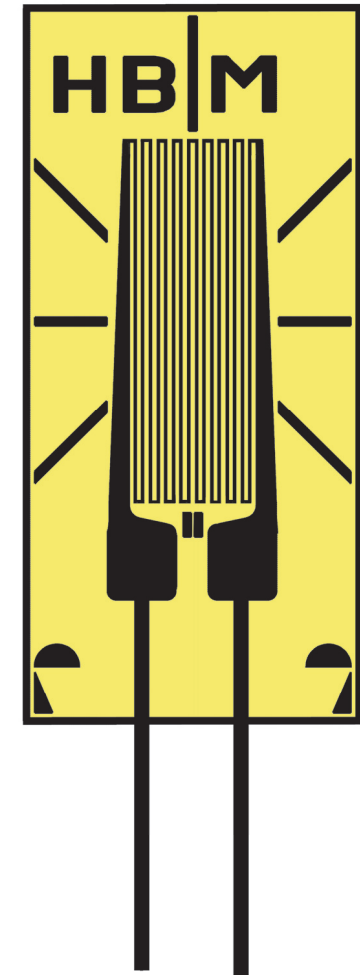


Foto: Fa. HBM, Darmstadt

Verformungszustand

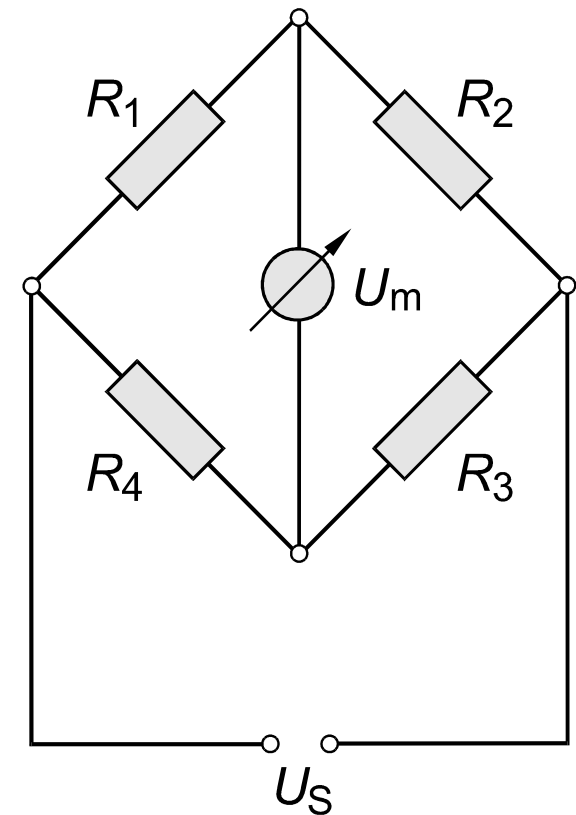
Die Messung der Widerstandsänderung ΔR erfolgt mit Hilfe einer **Wheatstoneschen Brückenschaltung**.

Zwischen Messspannung U_m , Speisespannung U_S und den Dehnungen ε_1 bis ε_4 an den jeweiligen Messstellen ergibt sich dann für kleine $\Delta R/R$ der folgende Zusammenhang (baugleiche Dehnungsmessstreifen vorausgesetzt):

$$\frac{U_m}{U_S} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

In Abhängigkeit der Anzahl eingesetzter Dehnungsmessstreifen sind die nachfolgenden Bezeichnungen für die Brückenschaltungen gebräuchlich. Die Vollbrücke sollte dabei bevorzugt angestrebt werden.

Anzahl aktiver DMS	Anzahl Ergänzungswiderstände	Bezeichnung der Brückenschaltung
1	3	Viertelbrücke
2	2	Halbbrücke
4	0	Vollbrücke

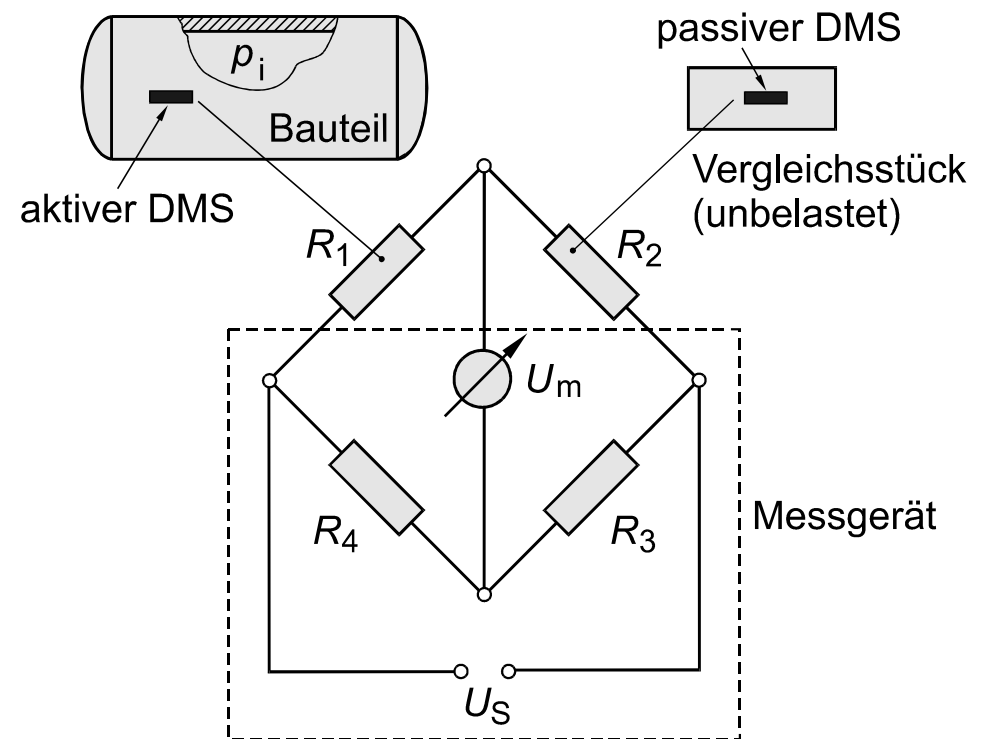


Verformungszustand

Dehnungen eines Bauteils können nicht nur durch mechanische Spannungen sondern auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden.

Ändert sich die Temperatur während der Messung, dann ist eine eindeutige Zuordnung des Messsignals zur mechanischen Beanspruchung nicht möglich.

Um den Temperatureinfluss zu kompensieren, wird ein **passiver Dehnungsmessstreifen** auf einem unbelasteten Vergleichsstück aus einem dem Bauteil entsprechenden Werkstoff appliziert und entsprechend der Abbildung in die Messbrücke geschaltet.

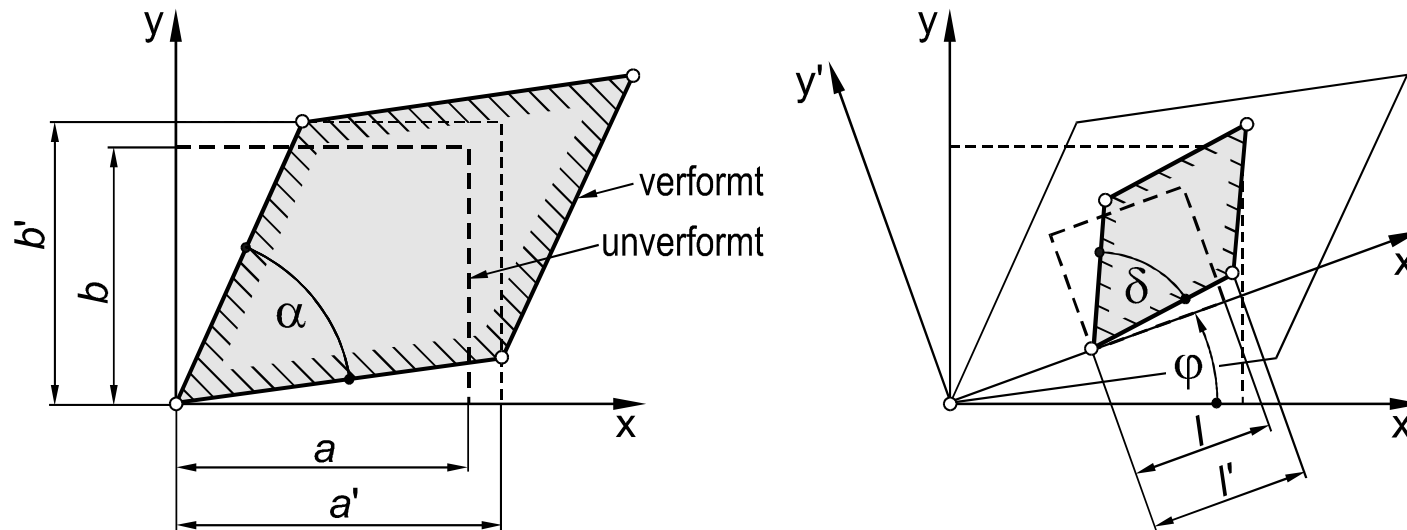


Verformungszustand

Aufgabe 4.1



Eine Rechteckscheibe ($a = 10 \text{ mm}$; $b = 8 \text{ mm}$) aus dem Vergütungsstahl 42CrMo4 wird in der dargestellten Weise elastisch verformt ($a' = 10,02 \text{ mm}$; $b' = 8,01 \text{ mm}$; $\alpha = 89,75^\circ$).



- Berechnen Sie die Dehnungen ε_x und ε_y in x- und y-Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Ermitteln Sie die Dehnungen $\varepsilon_{x'}$ und $\varepsilon_{y'}$ sowie die Schiebungen $\gamma_{x'y'}$ und $\gamma_{y'x'}$ für ein um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ gedrehtes Flächenelement
 - rechnerisch,
 - graphisch.
- Berechnen Sie die Länge l' sowie den Winkel δ des elastisch verformten, ursprünglich rechteckigen Flächenelementes mit der Seitenlänge $l = 5 \text{ mm}$.

Verformungszustand

Aufgabe 4.4



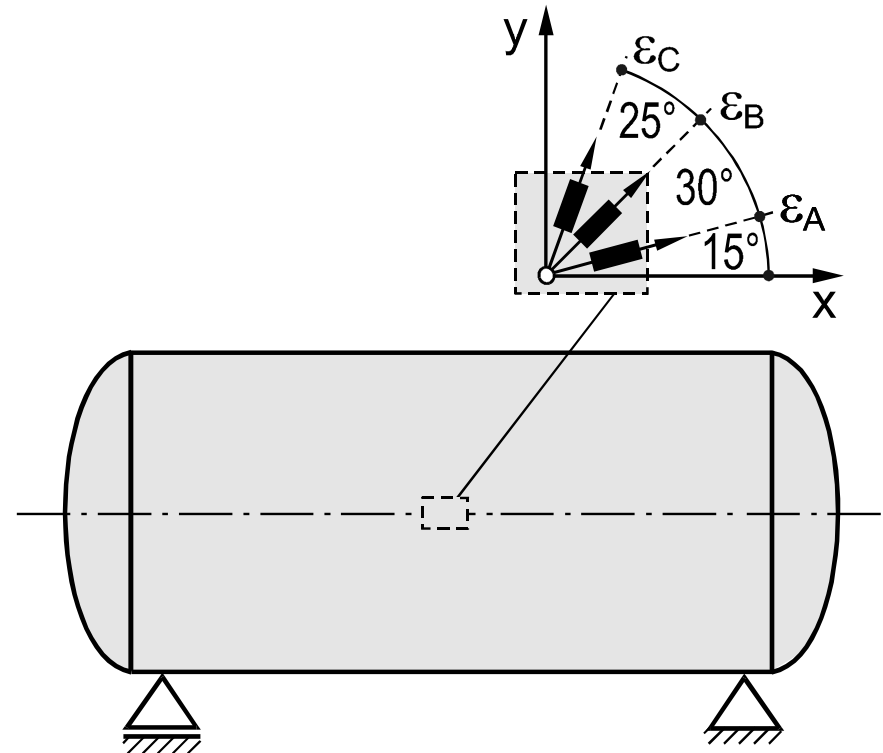
Zur Ermittlung des Verformungszustandes (ε_x , ε_y und γ_{xy}) eines durch Innendruck beanspruchten Behälters, werden an dessen Außenoberfläche drei Dehnungsmessstreifen in der dargestellten Weise appliziert. Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\varepsilon_A = 3,665 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_B = 1,500 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_C = -0,415 \text{ ‰}$$

- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Verformungskreis und ermitteln Sie *graphisch* die Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y) sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Bestimmen Sie *graphisch* die Hauptdehnungen in der x-y-Ebene. Unter welchen Winkeln φ_1 und φ_2 zur x-Richtung wirken die Hauptdehnungen?
- Ermitteln Sie *rechnerisch*:
 - die Dehnungen ε_x und ε_y in x- und y-Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
 - die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} in der x-y-Ebene sowie die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen.



Kapitel 5

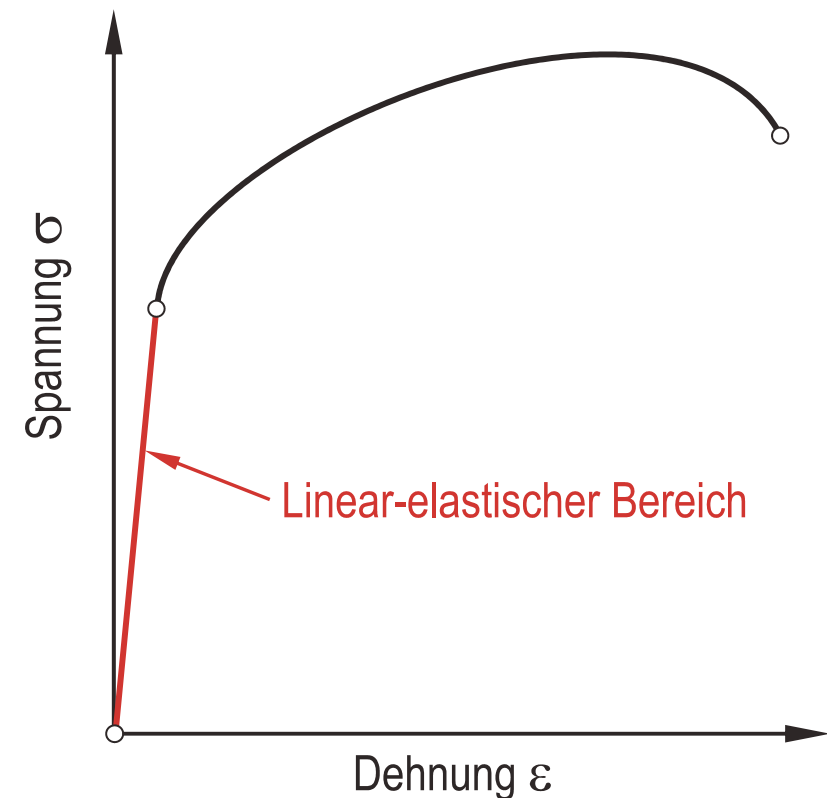
Elastizitätsgesetze

Elastizitätsgesetze

Einleitung

Mechanische Spannungen bewirken in einem deformierbaren Festkörper Formänderungen, die sich durch Längen- und/oder Winkeländerungen äußern können. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen wird durch **Stoffgesetze** beschrieben.

Für die nachfolgenden Ausführungen soll ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden, da Bauteile in der Regel nicht über die Streck- bzw. Dehngrenze beansprucht werden.



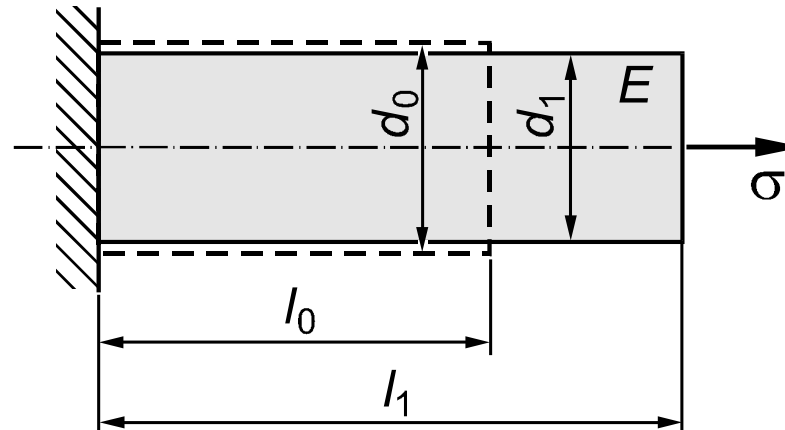
Elastizitätsgesetze

Formänderung durch einachsige Normalspannung

Unter einachsiger Beanspruchung durch eine Normalspannung erfährt ein elastisch beanspruchter Festkörper eine Längs- und eine Querverformung.

Hookesche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{l_1 - l_0}{l_0} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$



Poissonsches Gesetz

Zwischen Längsdehnung (ε_l) und Querdehnung (ε_q) gilt das Poissonsche Gesetz

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \quad \text{und} \quad \varepsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$

Elastizitätsgesetze

Formänderung durch Schubspannungen

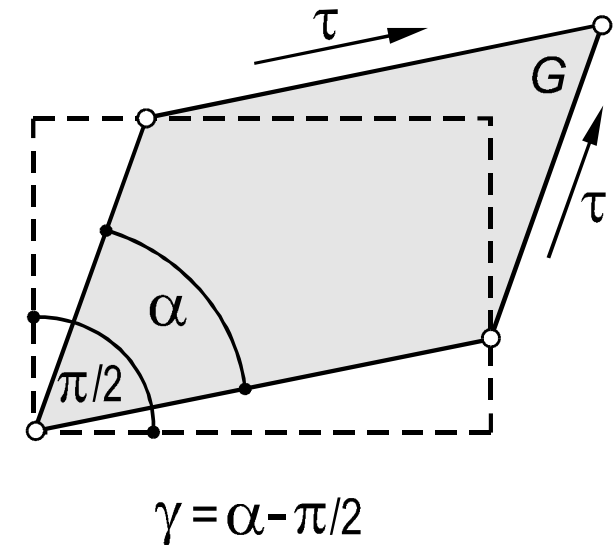
Unter einer Schubbeanspruchung erfährt ein elastisch beanspruchter Festkörper eine Winkelveränderung.

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Zwischen den drei elastischen Größen E , G und μ gilt für elastisch beanspruchte, isotrope Werkstoffe der Zusammenhang:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

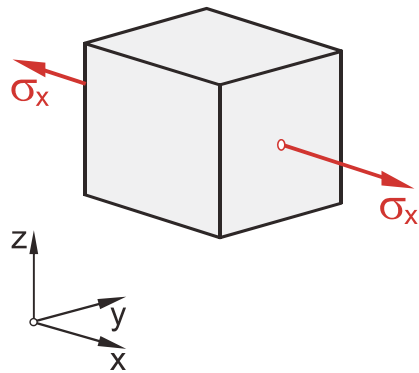


Elastizitätsgesetze

Formänderungen beim allgemeinen (dreiachsigen) Spannungszustand

Voraussetzung: Isotroper Werkstoff, d. h. die Beträge der elastischen Konstanten E , G und μ sind richtungsunabhängig

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_x

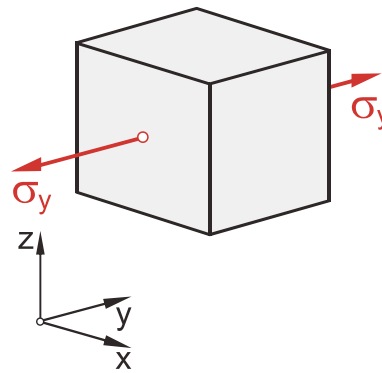


$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{y1} = -\mu \cdot \varepsilon_{x1} = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{z1} = -\mu \cdot \varepsilon_{x1} = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_y

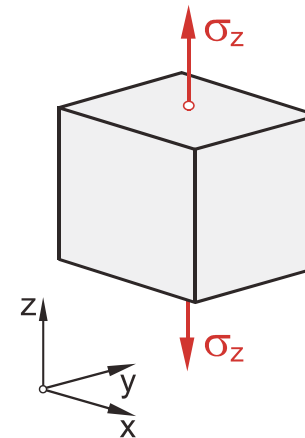


$$\varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_{x2} = -\mu \cdot \varepsilon_{y2} = -\mu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_{z2} = -\mu \cdot \varepsilon_{y2} = -\mu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_z



$$\varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_{x3} = -\mu \cdot \varepsilon_{z3} = -\mu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_{y3} = -\mu \cdot \varepsilon_{z3} = -\mu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

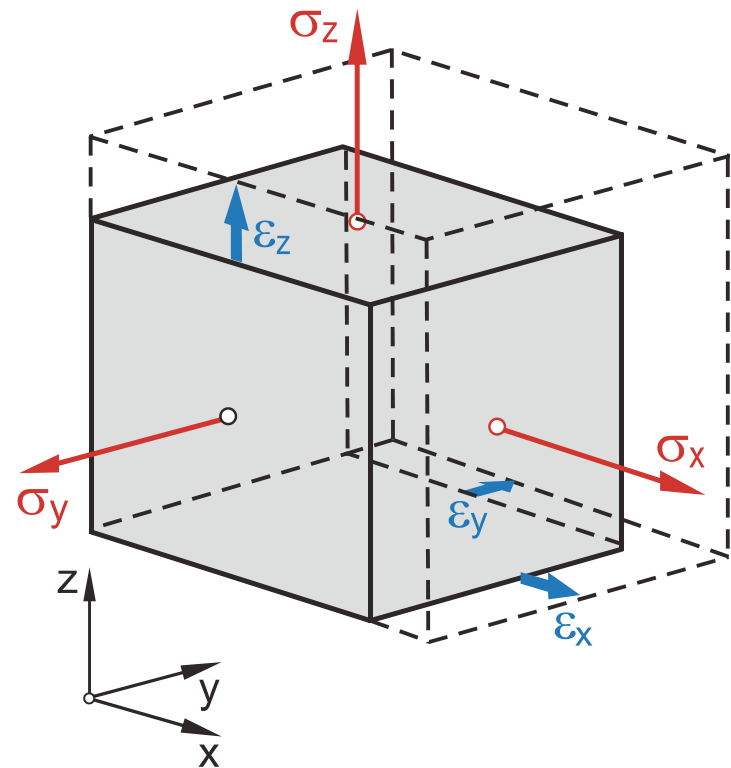
Elastizitätsgesetze

Wird das Volumenelement durch *alle drei* Normalspannungen gleichzeitig beansprucht, dann erhält man die Gesamtdehnung durch lineare Superposition.

Beispiel: x-Richtung

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3} \\ &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]\end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man auch die Gesamtdehnungen in y- und z-Richtung.

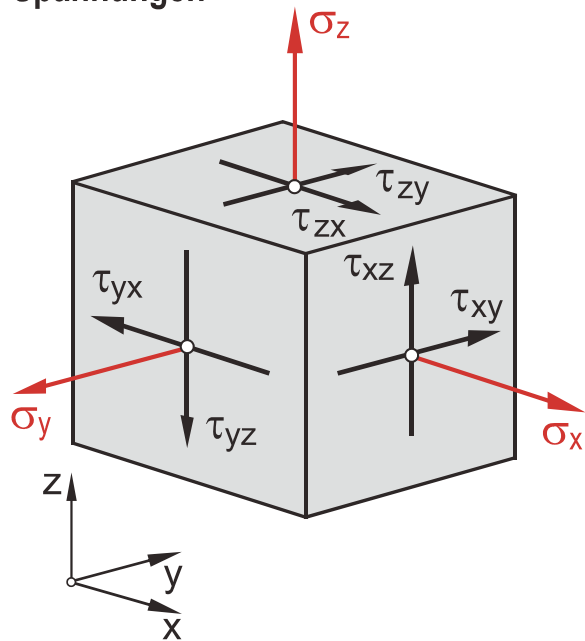


Elastizitätsgesetze

Hookesches Gesetz für Normalspannungen nach den Spannungen aufgelöst

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]\end{aligned}$$

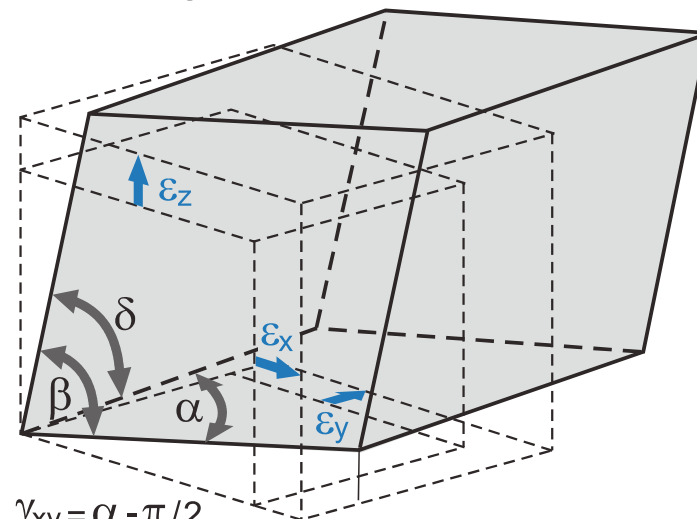
Spannungen



Hookesches Gesetz für Normalspannungen nach den Dehnungen aufgelöst

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}$$

Verformungen



$$\gamma_{xy} = \alpha - \pi/2$$

$$\gamma_{xz} = \beta - \pi/2$$

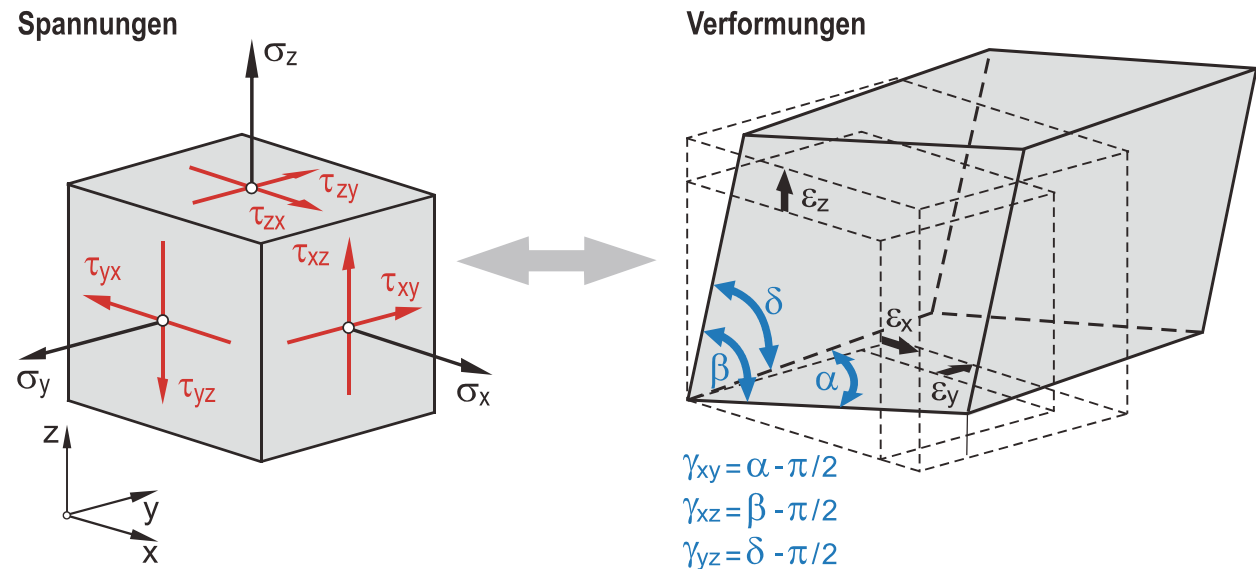
$$\gamma_{yz} = \delta - \pi/2$$

Elastizitätsgesetze

Bei linear-elastischem Werkstoffverhalten und unter der Voraussetzung eines isotropen Werkstoffs haben die Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) keinen Einfluss auf die Schiebungen (γ_{xy} , γ_{xz} und γ_{yz}) und umgekehrt. Das Hookesche Gesetz für Schubbeanspruchung kann unabhängig vom Hookeschen Gesetz für Normalspannungen angewandt werden.

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung für den allgemeinen (dreiachsigen) Spannungszustand

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}$$



Elastizitätsgesetze

Formänderungen beim ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

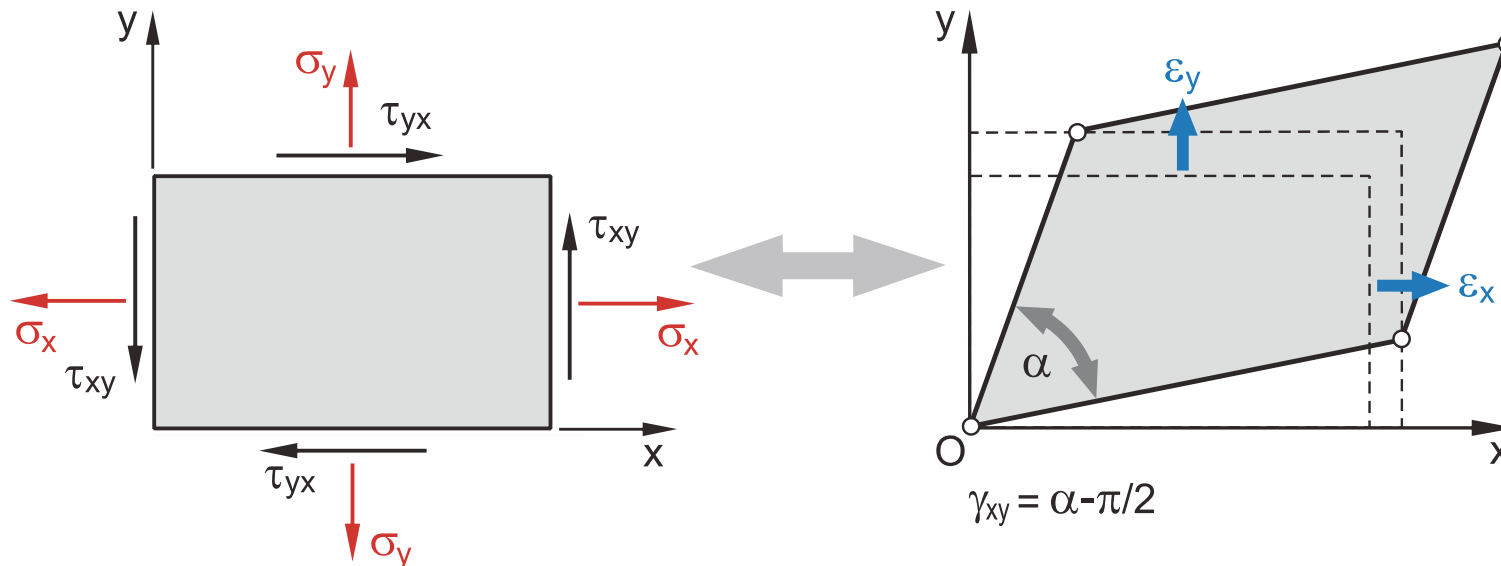
Aus dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz für den dreiachsigen Spannungszustand lassen sich die entsprechenden Beziehungen für den ebenen Spannungszustand ableiten.

Hookesches Gesetz für Normalspannungen nach den Spannungen aufgelöst

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen nach den Dehnungen aufgelöst

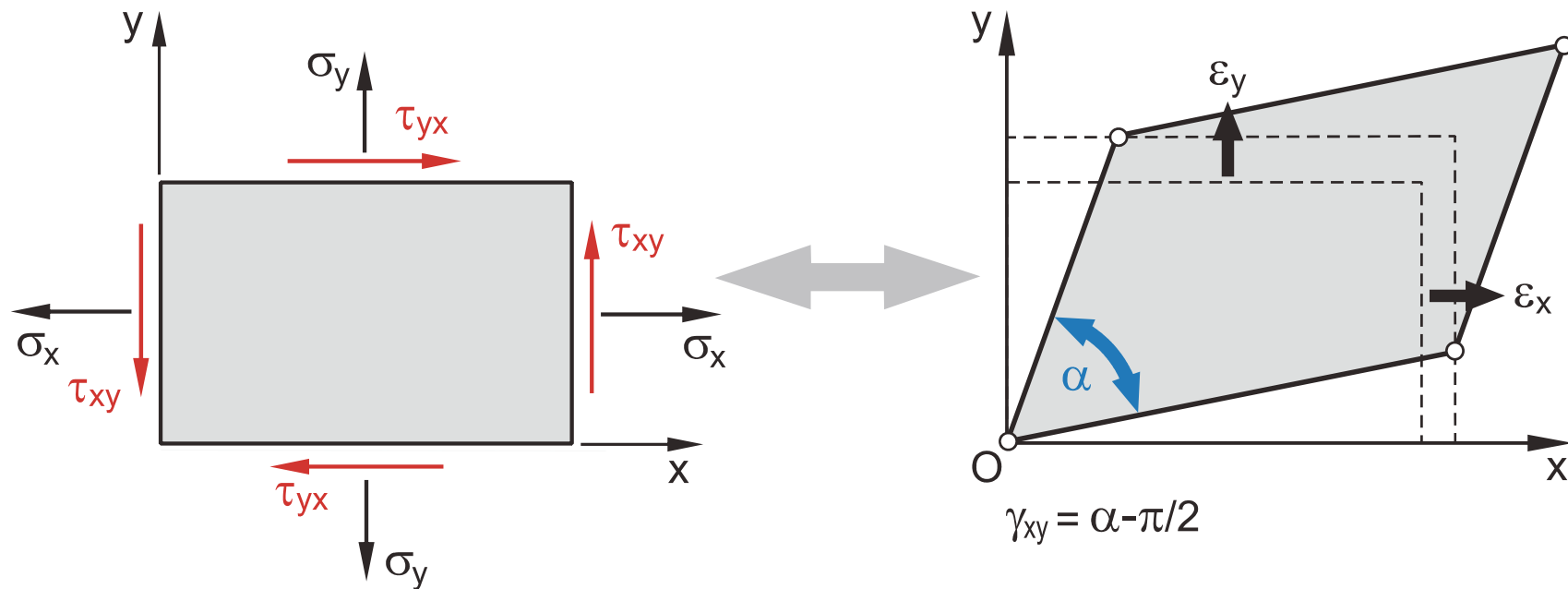
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}$$



Elastizitätsgesetze

Hookesches Gesetz für Schubspannungen für den ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



Die Gleichungen für den zweiachsigen Spannungszustand haben für praktische Anwendungen eine besonders große Bedeutung, da dieser Spannungszustand unter anderem an lastfreien Oberflächen vorliegt und insbesondere diese Stellen häufig höchst beansprucht sind (z. B. durch Biege- oder Torsionsbeanspruchung). Bauteiloberflächen sind außerdem einer experimentellen Spannungsanalyse zugänglich.

Elastizitätsgesetze

Aufgabe 5.1



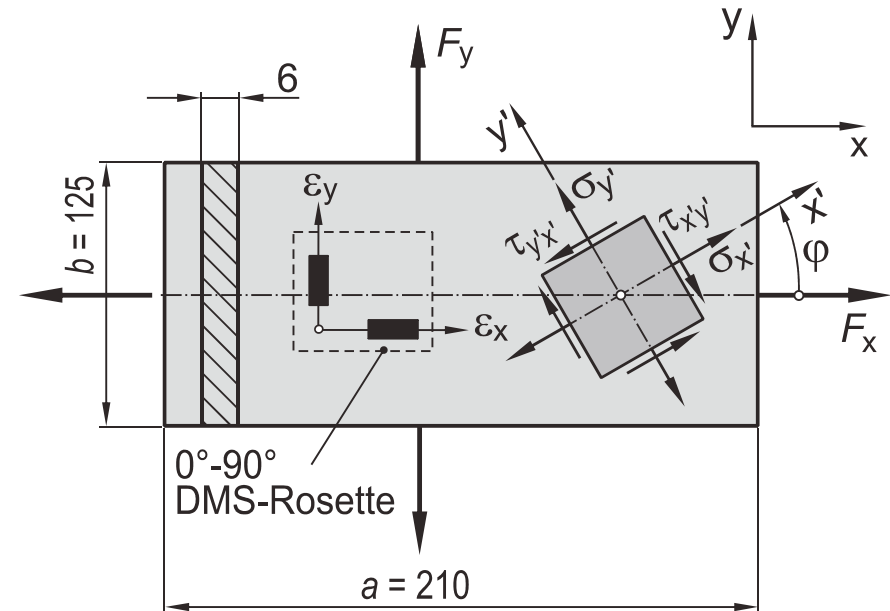
Eine rechteckige Scheibe aus unlegiertem Baustahl ($E = 210\,000\text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) mit den Seitenlängen $a = 210\text{ mm}$ und $b = 125\text{ mm}$ sowie der Dicke $t = 6\text{ mm}$ wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y statisch belastet (siehe Abbildung). Zwei an der Oberfläche der Scheibe applizierte Dehnungsmessstreifen liefern die folgenden Werte:

DMS A: $\varepsilon_x = 0,743\text{ ‰}$

DMS B: $\varepsilon_y = 0,124\text{ ‰}$

a) Berechnen Sie aus den Dehnungen die unbekannten Kräfte F_x und F_y .

b) Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die x-y-Ebene. Ermitteln Sie die Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ sowie $\tau_{x'y'}$ und $\tau_{y'x'}$ eines um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ zur x-Richtung gedrehten Flächenelementes (siehe Abbildung).



Elastizitätsgesetze

Aufgabe 5.2



Eine Scheibe aus Werkstoff 15MnNi6-3 mit einer Dicke von 20 mm wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y statisch beansprucht.

Zur Spannungsermittlung wurde eine 0° - 90° DMS-Rosette appliziert. Die Messrichtung von DMS A schließt dabei mit der x-Achse einen Winkel von $\alpha = 15^\circ$ ein (siehe Abbildung). Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen gemessen:

DMS A: $\varepsilon_A = 0,275 \text{ ‰}$

DMS B: $\varepsilon_B = -0,530 \text{ ‰}$

Werkstoffkennwerte 15MnNi6-3:

$R_e = 400 \text{ N/mm}^2$

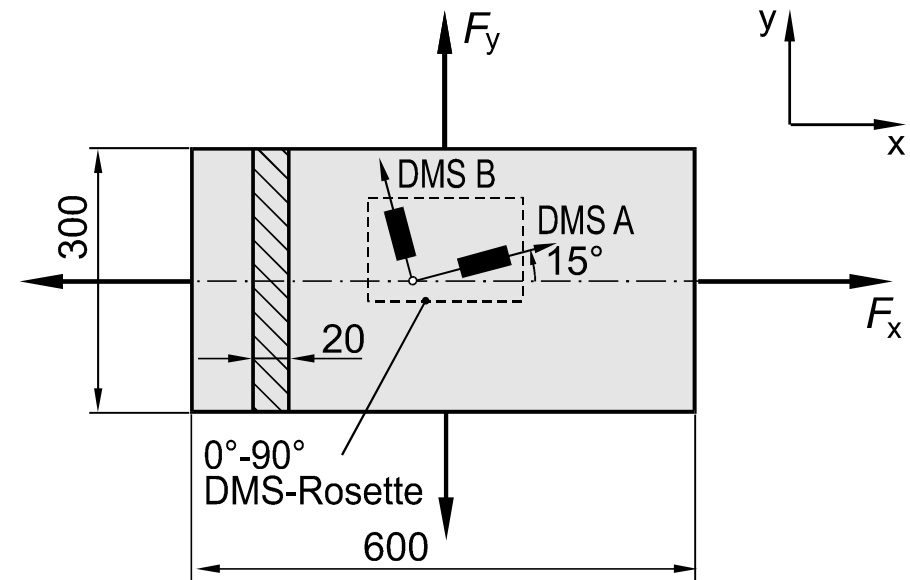
$R_m = 580 \text{ N/mm}^2$

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$

$\mu = 0,30$

a) Skizzieren Sie den Mohrschen Verformungskreis und berechnen Sie seinen Mittelpunkt (ε_M) und Radius (R).

b) Berechnen Sie die unbekannten Kräfte F_x und F_y .



Elastizitätsgesetze

Aufgabe 5.3



Ein scheibenförmiges Bauteil aus der legierten Einsatzstahlsorte 15MnNi6-3 wird im Betrieb einer statischen Beanspruchung unterworfen. Es herrscht ein ebener Spannungszustand.

Werkstoffkennwerte 15MnNi6-3:

$$R_e = 430 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 660 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

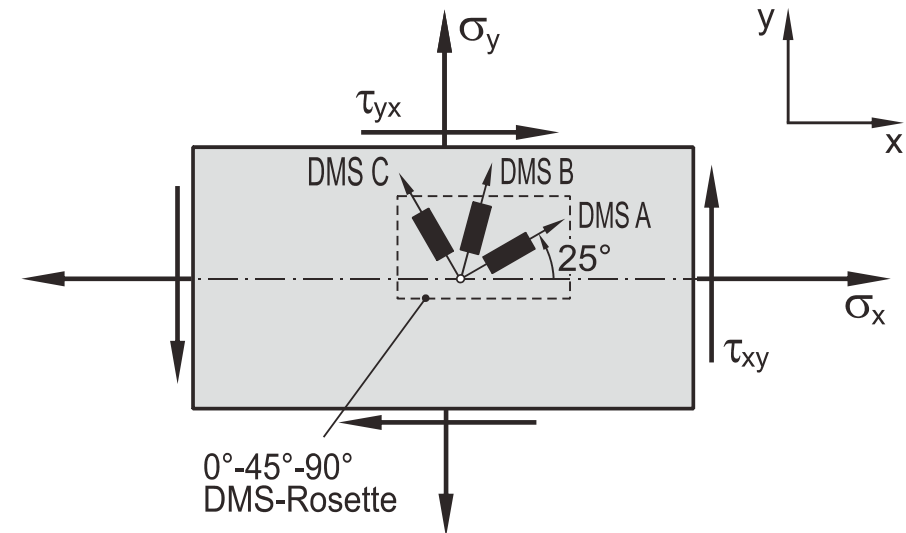
Mit Hilfe einer 0° - 45° - 90° DMS-Rosette werden bei einer unbekannten Belastung die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,702 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,012 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = -0,364 \text{ ‰}$$

Berechnen Sie die an der Scheibe angreifenden Spannungen σ_x , σ_y sowie τ_{xy} .



Elastizitätsgesetze

Aufgabe 5.5



Eine Stahlplatte aus Werkstoff S275J0 (Dicke $t = 15$ mm) wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y belastet (siehe Abbildung). Zur Ermittlung der Kräfte wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette in der skizzierten Weise auf der Oberfläche appliziert.

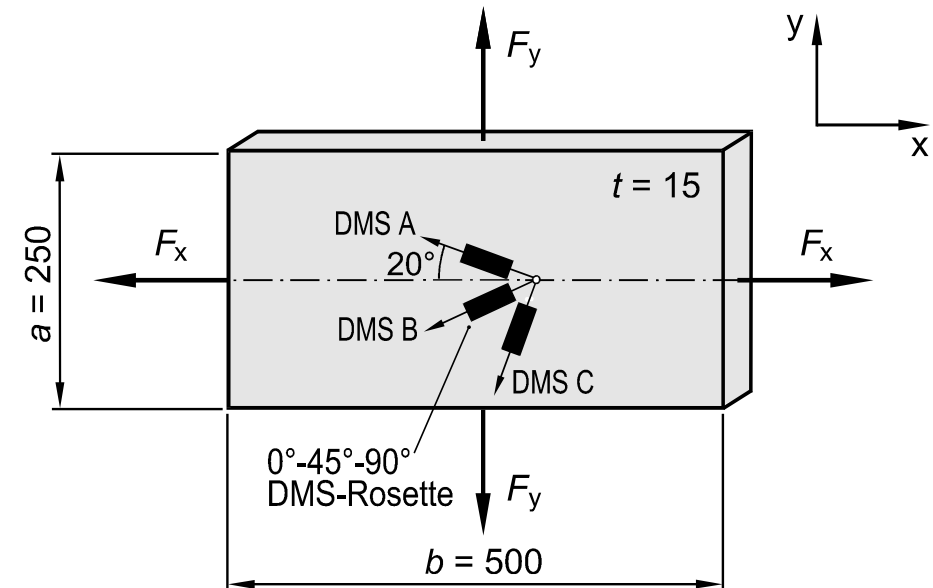
Werkstoffkennwerte S275J0:

$$R_m = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{p0,2} = 520 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- a) Berechnen Sie die unbekannten Kräfte F_x und F_y für eine Dehnungsanzeige von:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,7551 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = 0,7160 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = 0,2693 \text{ ‰}$$

- b) Berechnen Sie die Dehnungen ε_A , ε_B und ε_C für $F_x = F_y = 500$ kN.

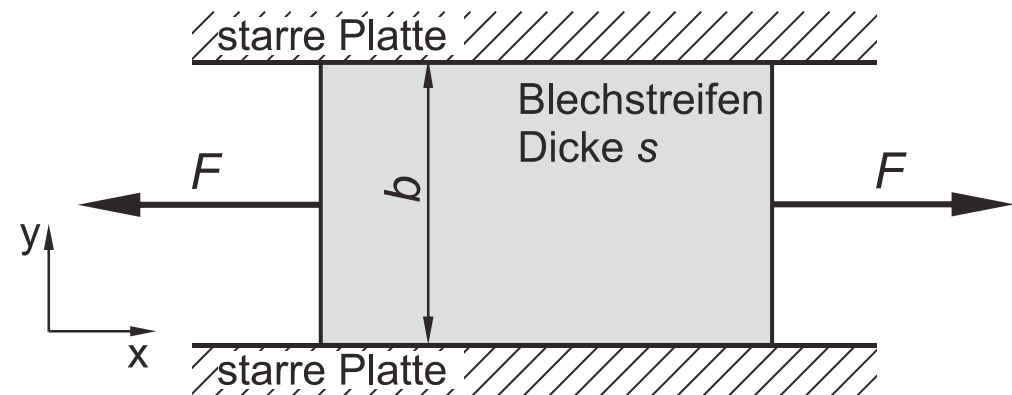
- c) Ermitteln Sie die Dickenänderung Δt der Stahlplatte aufgrund der Beanspruchung gemäß Aufgabenteil b ($F_x = F_y = 500$ kN).

Elastizitätsgesetze

Aufgabe 5.7



Ein Blechstreifen aus unlegiertem Baustahl ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) besitzt eine Dicke von $s = 25 \text{ mm}$ und eine Breite von $b = 80 \text{ mm}$ (siehe Abbildung). Der Blechstreifen kann sich in x- und z-Richtung reibungsfrei verformen, wird aber zwischen zwei starren Platten so geführt, dass eine Verformung in y-Richtung nicht möglich ist.



Berechnen Sie die Spannungen in x- und y-Richtung (σ_x und σ_y) sowie die Dehnungen in x- und z-Richtung (ε_x und ε_z), falls der Blechstreifen mit einer Zugkraft von $F = 420 \text{ kN}$ in x-Richtung belastet wird.

Kapitel 6

Festigkeitshypothesen

Festigkeitshypothesen

Einleitung

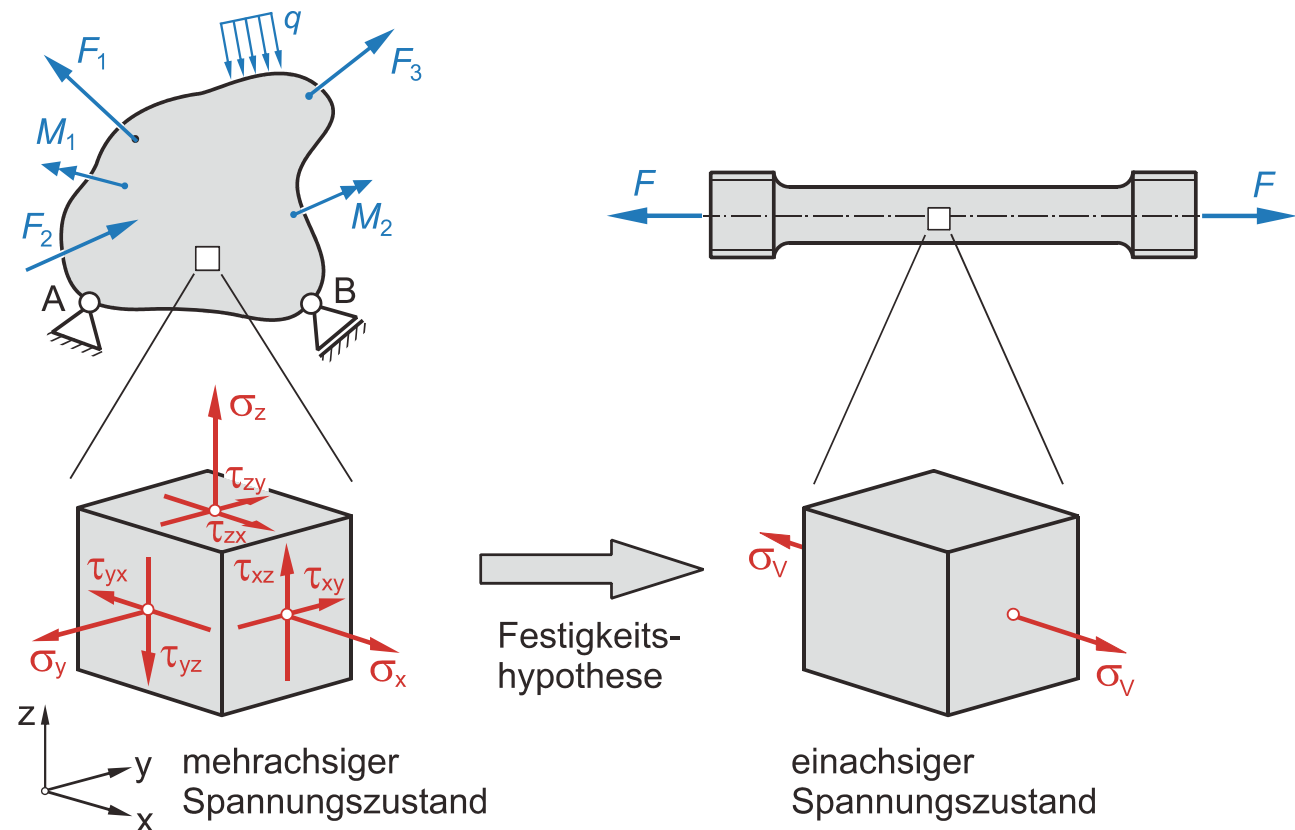
Reale Bauteile unterliegen bei Betriebsbeanspruchung meist einem mehrachsigen Spannungszustand (z. B. Biegung mit überlagerter Torsion oder mehrachsige Zug- bzw. Druckbeanspruchung).

Es stellt sich dabei die Frage, welche der Beanspruchungen bzw. in welcher Kombination die wirkenden Beanspruchungen zu einem Versagen des Bauteils führen. Eine Versuchsanordnung die es erlaubt, diese Frage allgemein zu beantworten gibt es nicht. Zur Lösung des Problems wurden verschiedene **Festigkeitshypothesen** entwickelt.

Festigkeitshypothesen

Eine Festigkeitshypothese ist eine Übertragungsfunktion (Berechnungsvorschrift), mit deren Hilfe ein mehrachsiger Spannungszustand in einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand (σ_V) überführt werden kann.

Die mit Hilfe einer Festigkeitshypothese berechnete fiktiv einachsige Spannung σ_V (**Vergleichsspannung**) kann dann mit den im einachsigen Zugversuch ermittelten Werkstoffkennwerten (R_e bzw. $R_{p0,2}$ und R_m) verglichen werden.



Die wichtigsten Festigkeitshypothesen sind:

- **Normalspannungshypothese (NH)**
- **Schubspannungshypothese (SH)**
- **Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)**

Festigkeitshypothesen

Normalspannungshypothese (NH)

Die Normalspannungshypothese (NH) wurde erstmals 1861 von **William John Macquorn Rankine** (schottischer Ingenieur und Physiker 1820 ... 1872) formuliert.

Anwendung

Die Anwendung der Normalspannungshypothese setzt einen **spröden Werkstoff** (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit oder keramische Werkstoffe) bzw. **sprödes Werkstoffverhalten** (z. B. martensitisch gehärteter Stahl) voraus.

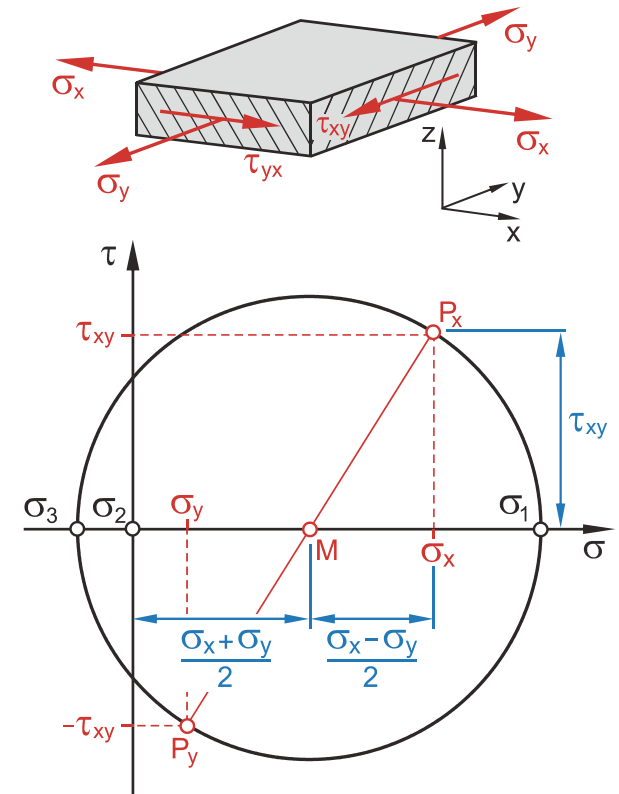
Berechnungsformeln

Vergleichsspannung nach der NH in Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{\text{VNH}} = \sigma_1$$

Vergleichsspannung nach der NH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand:

$$\sigma_{\text{VNH}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Festigkeitshypothesen

Vergleichsspannung nach der NH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

$$\sigma_{\text{VNH}} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$



Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z zu ersetzen. Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a . Für eine zusammengesetzte Beanspruchung aus Druck und Torsion bzw. Abscherung ist die Mohrsche Versagenshypothese (siehe Folie 6-7 und 6-8) zu beachten.

Festigkeitsbedingung nach der NH

$$\sigma_{\text{VNH}} \leq \frac{R_m}{S_B}$$

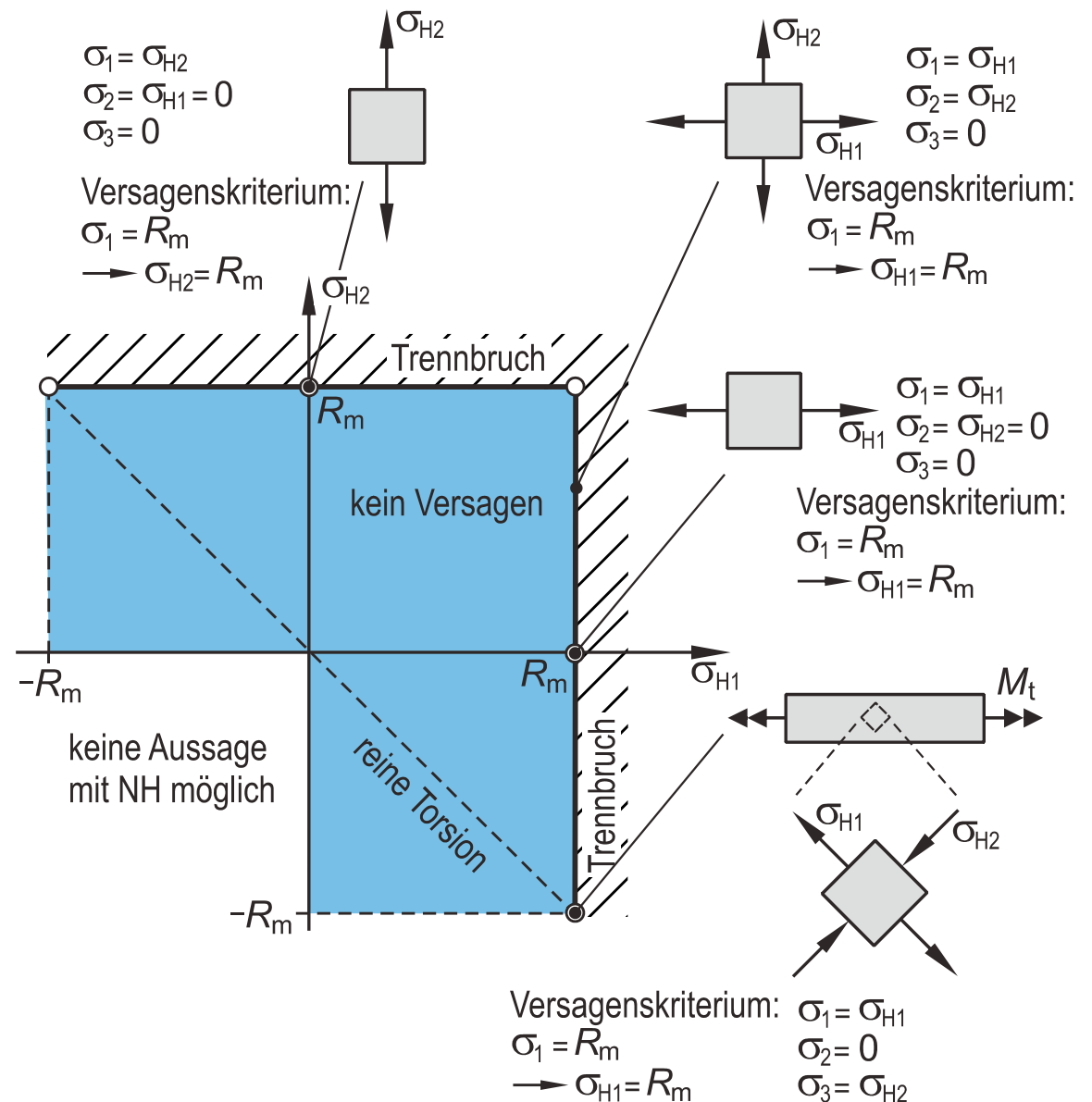
Festigkeitshypothesen

Grenzkurven für das Werkstoffversagen spröder Werkstoffe bei zweiachsigem SPZ

Normalspannungshypothese

Bei spröden Werkstoffen tritt gemäß der Normalspannungshypothese ein Versagen durch Trennbruch ein, sobald die größte Normalspannung (σ_1) die Trennfestigkeit σ_T (bei ideal spröden Werkstoffen ist dies die Zugfestigkeit R_m) des Werkstoffs erreicht.

Da eine Materialtrennung nur unter Zugbeanspruchung stattfinden kann, muss hierbei $\sigma_1 > 0$ sein. Dies führt auf die dargestellte Grenzkurve für Werkstoffversagen.



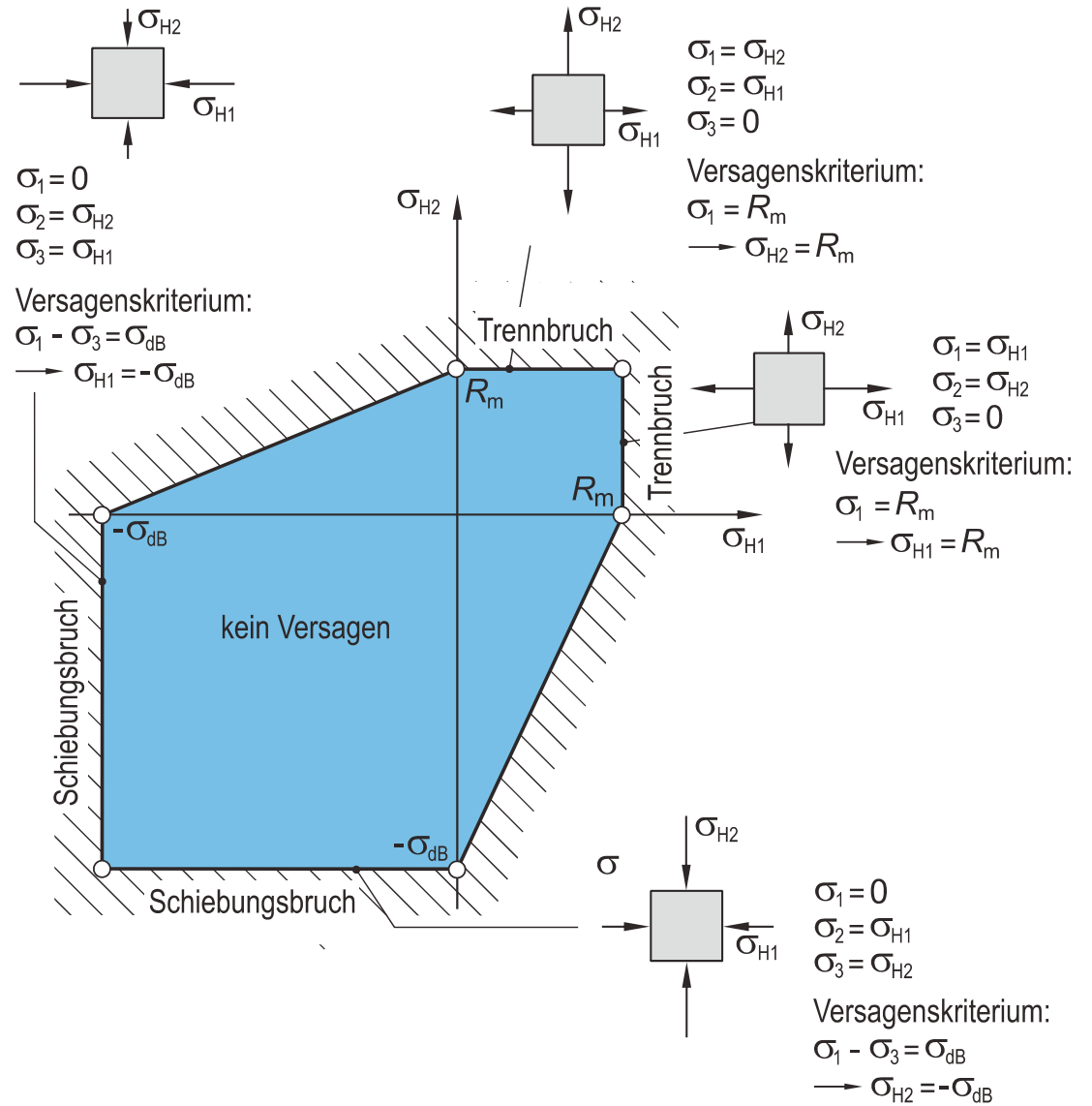
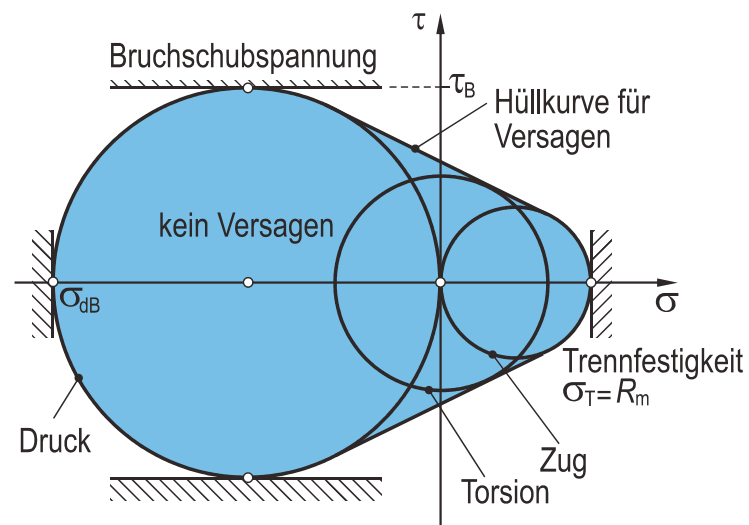
Festigkeitshypothesen

Mohrsche Versagenshypothese

Einige spröde Werkstoffe, wie zum Beispiel Gusseisen mit Lamellengraphit, ertragen unter Druckbeanspruchung deutlich höhere Spannungen im Vergleich zu einer Zuglast ($|\sigma_{dB}| > R_m$). Außerdem ändert sich unter Druckbeanspruchung der Versagensmechanismus (Trennbruch unter Zug, Schiebungsbruch unter Druck).

Um das Werkstoffverhalten zu beschreiben, reicht die NH alleine nicht mehr aus. Die **Mohrsche Versagenshypothese** versucht hierbei beide Versagensarten, den Trennbruch und den Schiebungsbruch, zu kombinieren.

Festigkeitshypothesen



Festigkeitshypothesen

Schubspannungshypothese (SH)

Die Schubspannungshypothese wurde 1864 von **Henri Edouard Tresca** (1814 ... 1885) aufgestellt.

Anwendung

Die Schubspannungshypothese geht von der Vorstellung aus, dass plastische Formänderungen als Gleitvorgänge im Kristallgitter erfolgen und durch Schubspannungen ausgelöst werden. Die Anwendung setzt dementsprechend einen **duktilen Werkstoff** bzw. **duktilen Werkstoffverhalten** und damit Versagen durch Fließen voraus.

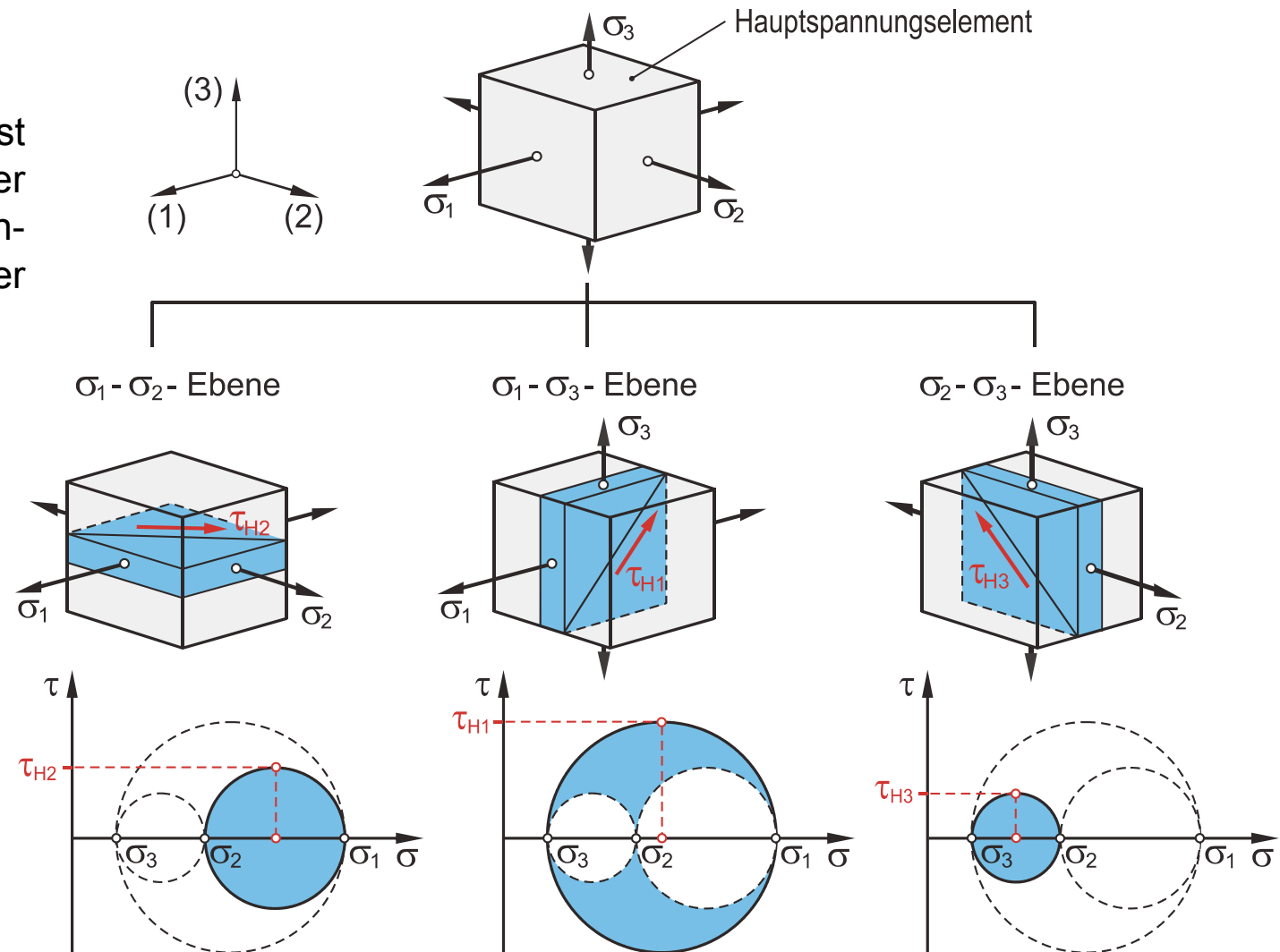
Festigkeitshypothesen

Berechnungsformeln

Vergleichsspannung nach der SH in Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Für ein Versagen ist immer die größte der drei Hauptschubspannungen (τ_{H1} , τ_{H2} oder τ_{H3}) entscheidend.



Festigkeitshypothesen

Vergleichsspannung nach der SH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

falls $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$

$$\sigma_{VSH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

falls $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$

Vergleichsspannung nach der SH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z und bei Druckbeanspruchung durch σ_d zu ersetzen.
Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a

Festigkeitsbedingung nach der SH

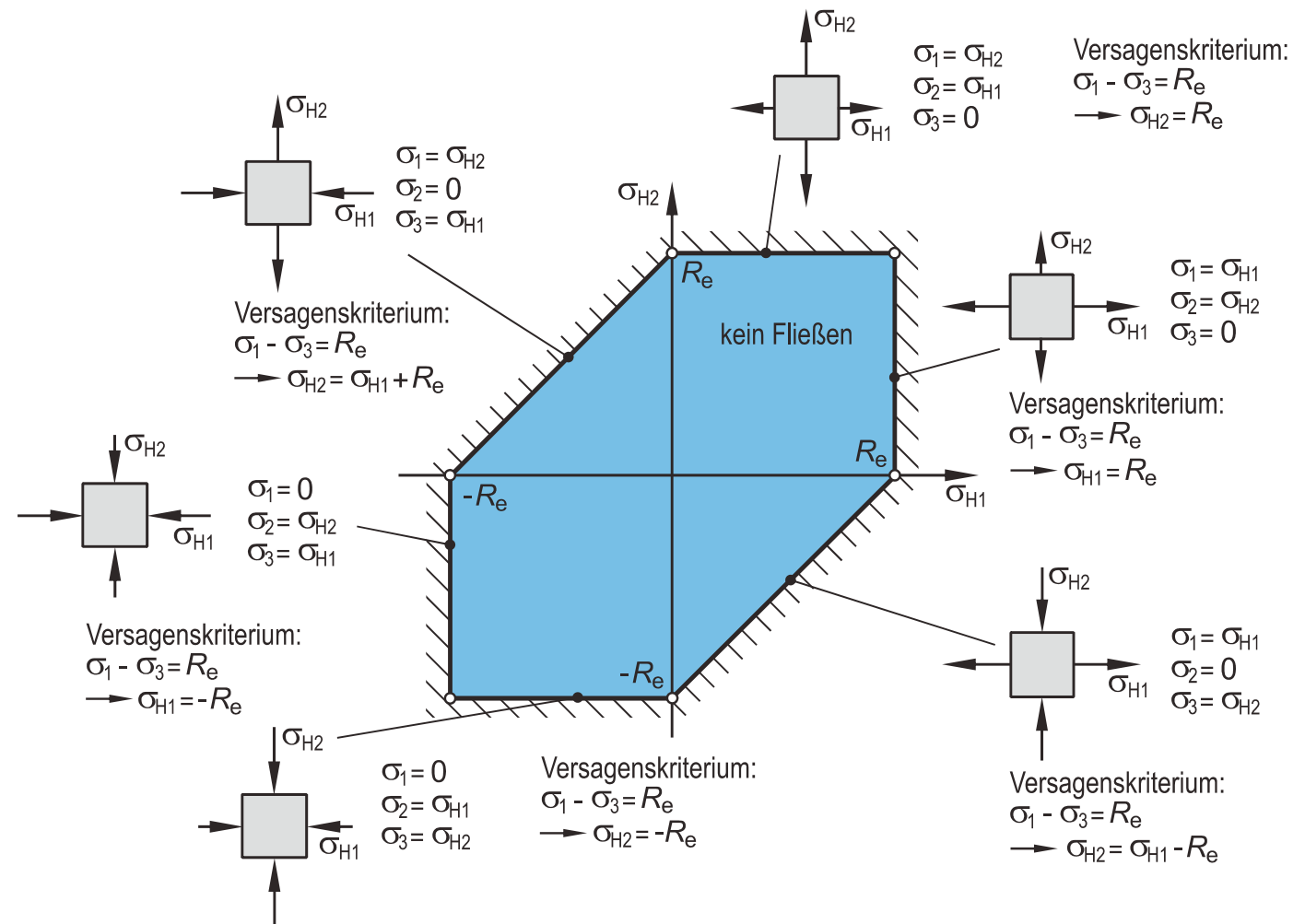
$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_e}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Festigkeitshypothesen

Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der Schubspannungshypothese für den zweiachsigen Spannungszustand

Duktile Werkstoffe versagen nach der Schubspannungshypothese sobald die Vergleichsspannung σ_{VSH} die Streck- oder Dehngrenze des Werkstoffs überschreitet, falls also gilt: $\sigma_{VSH} = \sigma_1 + \sigma_3 > R_e$ bzw. $\sigma_{VSH} = \sigma_1 + \sigma_3 > R_{p0,2}$

Überträgt man dieses Kriterium in ein σ_{H1} - σ_{H2} -Hauptspannungsdiagramm, dann erhält man als Grenzkurve ein Sechseck (**Tresca-Sechseck**).



Festigkeitshypothesen

Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

Die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) geht auf **Maksymilian Tytus Huber** (1872 ... 1950), **Richard Edler von Mises** (1883 ... 1953) und **H. Hencky** (1885 ... 1951) zurückgeht.

Anwendung

Sobald die in einem elastisch verformten Volumenelement gespeicherte Gestaltänderungsenergie einen werkstoffabhängigen Grenzwert erreicht, der sich aus dem Vergleich mit der einachsigen Beanspruchung im Zugversuch ergibt, versagt der Werkstoff infolge plastischer Verformung.

Die Anwendung der GEH setzt dementsprechend, analog zur SH, einen **duktilen Werkstoff** bzw. **duktilen Werkstoffverhalten** und damit Versagen durch Fließen voraus.

Da sowohl die SH als auch die GEH von ähnlichen Vorstellungen ausgehen, liefern sie auch vergleichbare Ergebnisse. Es lässt sich für alle möglichen Kombinationen der drei Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 zeigen, dass der **größte Unterschied zwischen GEH und SH etwa 15,5%** beträgt, wobei die nach der SH errechnete Vergleichsspannung ($\sigma_{V SH}$) stets größer ist, als die nach der GEH errechnete Vergleichsspannung ($\sigma_{V GEH}$). Mit der SH erhält man dementsprechend konservative Ergebnisse.

Festigkeitshypothesen

Berechnungsformeln

Vergleichsspannung nach der GEH in Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z und bei Druckbeanspruchung durch σ_d zu ersetzen. Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a .

Festigkeitsbedingung nach der GEH

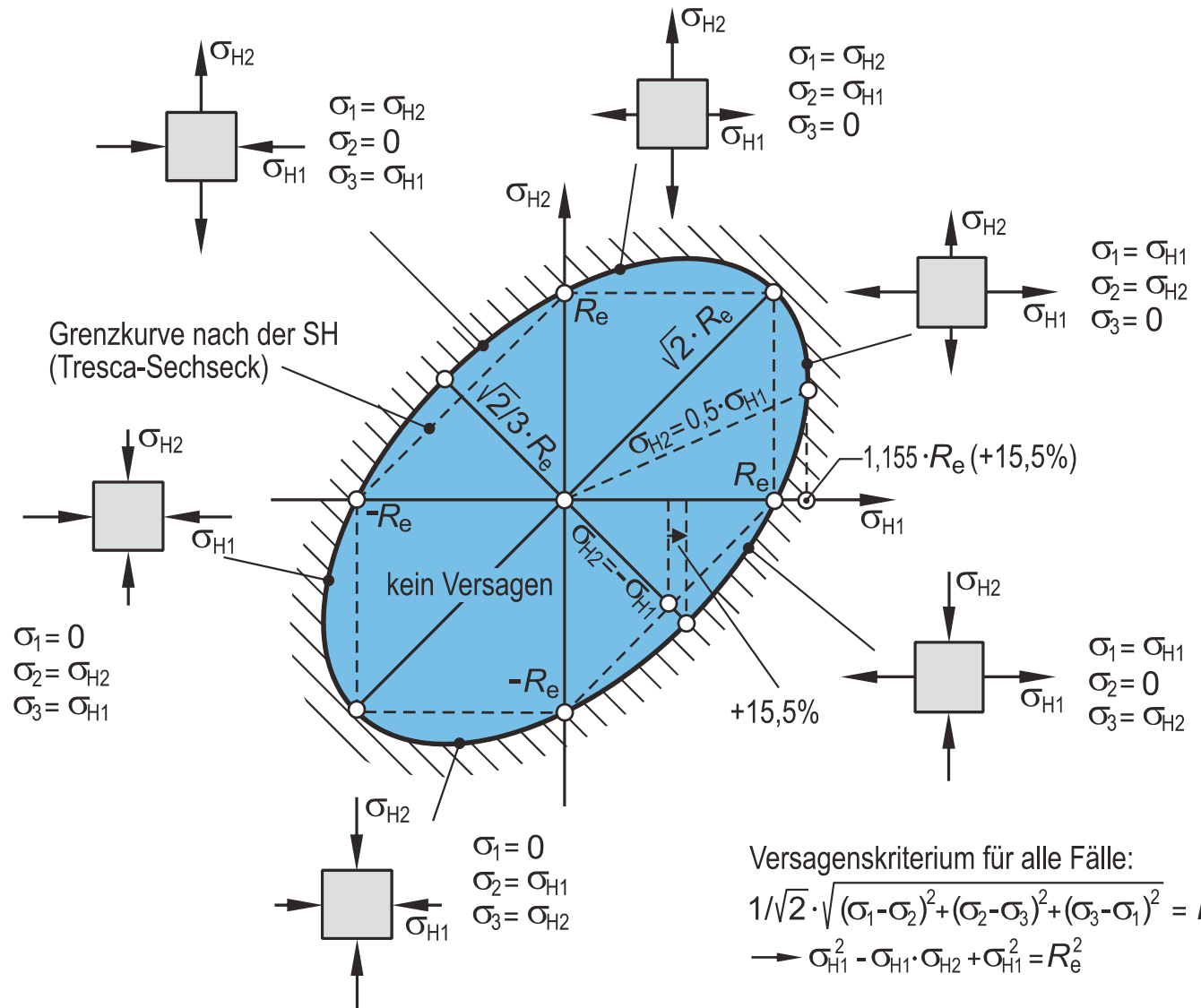
$$\sigma_{VGEH} \leq \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Festigkeitshypothesen

Grenzkurve für Werkstoffversagen nach der GEH für den zweiachsigen Spannungszustand

Duktile Werkstoffe versagen nach der GEH sobald die Vergleichsspannung σ_{VGEH} die Streck- oder Dehngrenze des Werkstoffs überschreitet.

Überträgt man dieses Kriterium in ein σ_{H1} - σ_{H2} -Hauptspannungsdiagramm, dann erhält man eine **elliptische Grenzkurve**.



Festigkeitshypothesen

Zusammenfassung der Festigkeitshypothesen

Festigkeits- hypothese	Vergleichsspannung $\sigma_{V\text{ NH}}, \sigma_{V\text{ SH}}, \sigma_{V\text{ GEH}}$			
	dreiachsiger Spannungszustand in Hauptspannungen	zweiachsiger Spannungszustand		
		in Haupt- spannungen	in Lastspannungen	Sonderfall ²⁾ Biegung u. Torsion
NH	σ_1 ¹⁾	σ_1 ¹⁾	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$
SH	$\sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	falls $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$: $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$ falls $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$: $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$
GEH	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	falls $\sigma_3 = 0$: $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}$ falls $\sigma_2 = 0$: $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3}$ falls $\sigma_1 = 0$: $\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3}$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$

¹⁾ nur gültig falls $\sigma_1 > 0$

²⁾ oder Zug (σ_z) bzw. Druck (σ_d) und Torsion (τ_t) bzw. Abscherung (τ_a)

Festlegung der Hauptnormalspannungen $\sigma_1 := \max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$
 $\sigma_3 := \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$
 $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

Festigkeitshypothesen

Aufgabe 6.3

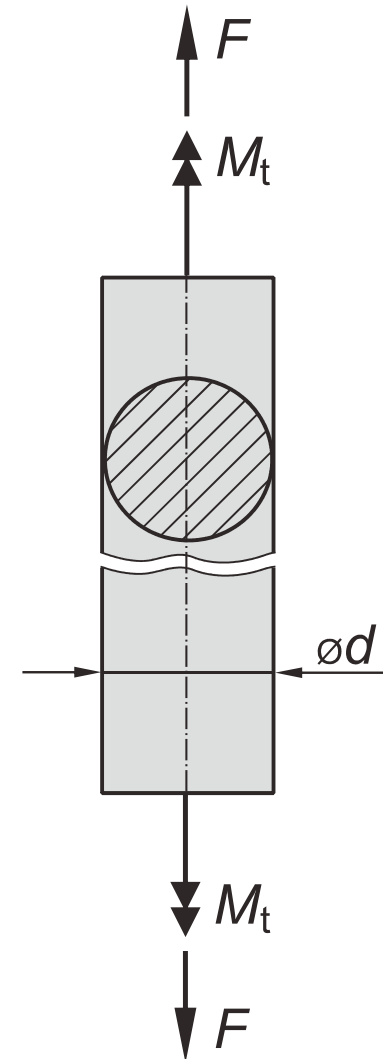


Auf eine vertikale Turbinenwelle mit dem Durchmesser $d = 90 \text{ mm}$ (Vollkreisquerschnitt) aus Vergütungsstahl C45E ($R_e = 490 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 710 \text{ N/mm}^2$) wirkt im Betrieb zunächst ein statisches Torsionsmoment von $M_t = 14000 \text{ Nm}$ und eine statische Zugkraft von $F = 890 \text{ kN}$.

- a) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?

Um ein höheres Torsionsmoment aufnehmen zu können, wird eine vergütete Welle aus der legierten Vergütungsstahlsorte 30CrMoV9 ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1100 \text{ N/mm}^2$) eingebaut.

- b) Auf welchen Betrag M_t^* kann dadurch das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft ($F = 890 \text{ kN}$) und gleicher Sicherheit gesteigert werden, falls Fließen ausgeschlossen werden soll?



Festigkeitshypothesen

Aufgabe 6.5

Eine Platte aus der Aluminium-Legierung EN AW-Al Zn5Mg3Cu mit einer Dicke von $t = 15 \text{ mm}$ wird durch die unbekannten Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} elastisch beansprucht (siehe Abbildung). Zur Ermittlung der Spannungen wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette in der skizzierten Weise auf der Oberfläche appliziert.

Werkstoffkennwerte für die Aluminiumlegierung EN AW-Al Zn5Mg3Cu:

$$R_{p0,2} = 380 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 75000 \text{ N/mm}^2$$

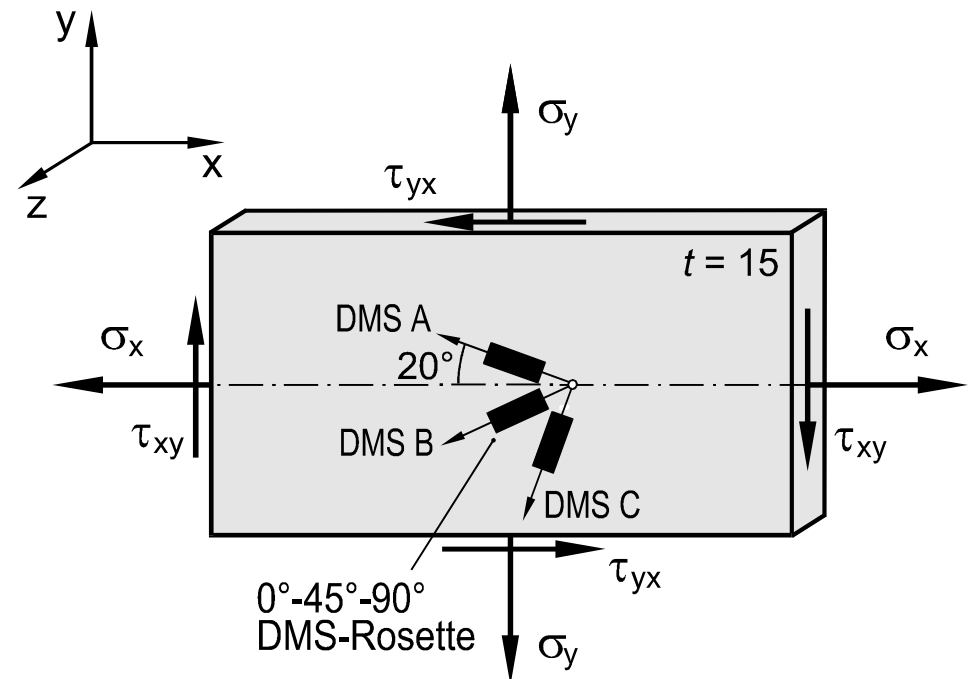
$$\mu = 0,33$$

a) Berechnen Sie die unbekannten Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} für eine Dehnungsanzeige von:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 3,159 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = 0,552 \text{ ‰}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = -0,479 \text{ ‰}$$



Festigkeitshypothesen

- b) Bestimmen Sie Richtung und Betrag der Hauptnormalspannungen.
- c) Ermitteln Sie die Dickenänderung der Aluminiumplatte aufgrund der Beanspruchung gemäß Aufgabenteil a).
- d) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend? Das Werkstoffverhalten kann annähernd als duktil angesehen werden.

Festigkeitshypothesen

Aufgabe 6.6

Im Rahmen einer experimentellen Spannungsanalyse wurde am Übergang zwischen Zylinder und Stutzen eines Druckbehälters aus der Stahlsorte 36CrNiMo4 ($R_m = 1150 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2} = 850 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\varepsilon_t = 0,900 \text{ ‰}$$

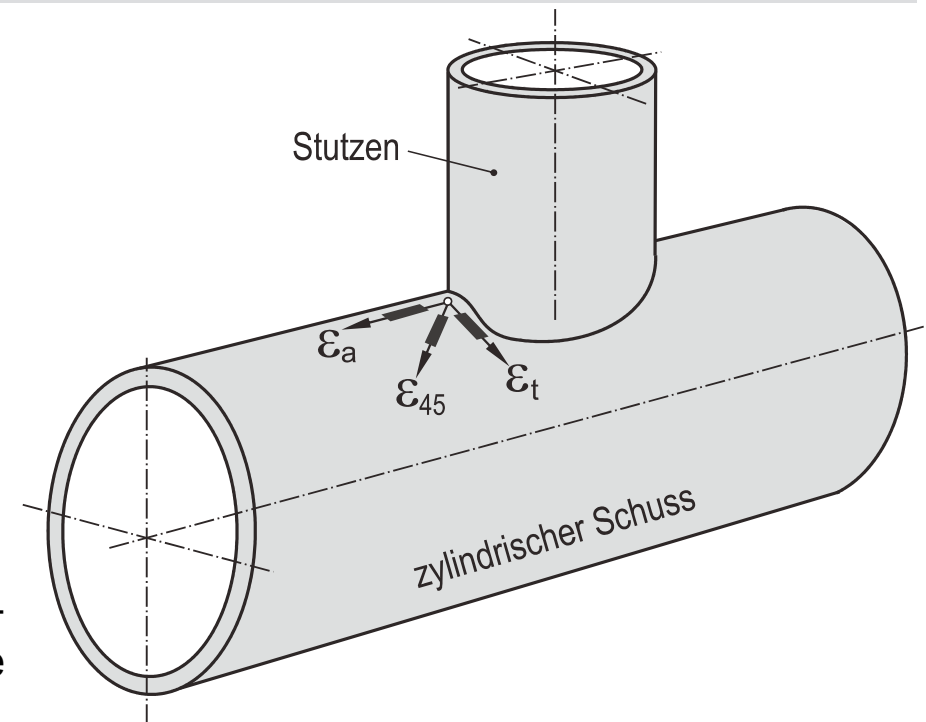
$$\varepsilon_a = -0,500 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{45} = 0,840 \text{ ‰}$$

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der gemessenen Dehnungen die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} sowie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} .

Ermitteln Sie außerdem die Winkel der Hauptdehnungen bzw. Hauptnormalspannungen zur Behälterlängsachse (Axialrichtung).

- b) Berechnen Sie an der Messstelle die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH).
- c) Ermitteln Sie für die Stutzenabzweigung die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?



Festigkeitshypothesen

Aufgabe 6.7



Zur Überprüfung der Belastung eines Zugankers mit Vollkreisquerschnitt ($\varnothing 30\text{mm}$) aus der Vergütungsstahlsorte 30CrNiMo8 wird ein Dehnungsmessstreifen appliziert. Versehentlich wird der Dehnungsmessstreifen schräg ($\alpha = 15^\circ$) zur Längsachse angebracht (siehe Abbildung).

Werkstoffkennwerte 30CrNiMo8:

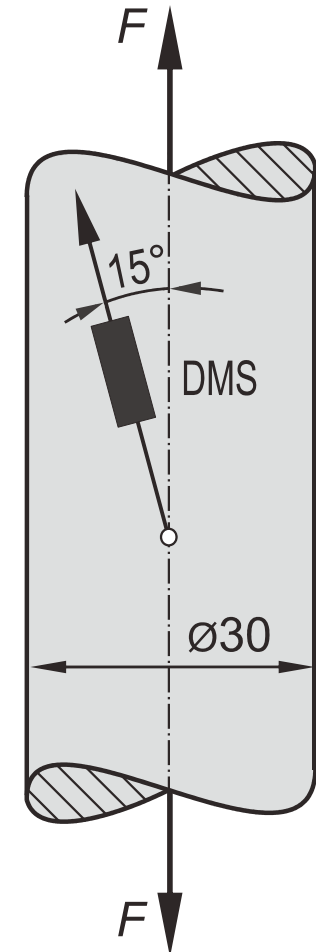
$$R_{p0,2} = 1020 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1390 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 204000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie für eine Zugkraft von $F_1 = 320 \text{ kN}$ die Dehnungsanzeige (ε_{DMS}).
- Bestimmen Sie die Zugkraft F_2 bei einer Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{\text{DMS}} = 3,000 \text{ ‰}$.
- Ermitteln Sie die Zugkraft F_3 bei Fließbeginn des Zugankers sowie die zugehörige Anzeige des Dehnungsmessstreifens.



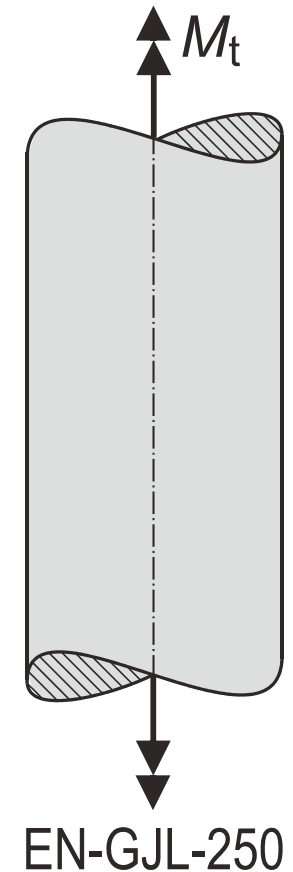
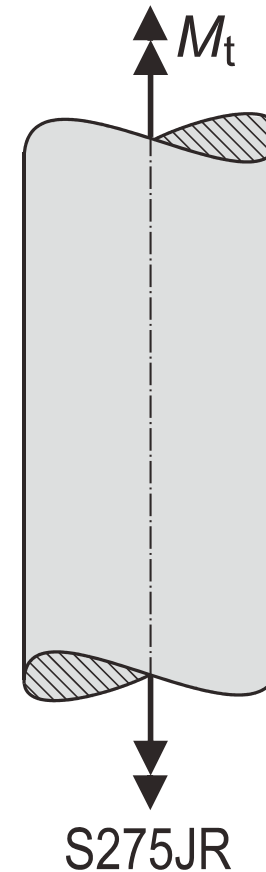
Festigkeitshypothesen

Aufgabe 6.10



Zwei identische Stäbe mit Vollkreisquerschnitt werden mit einem stetig zunehmenden Torsionsmoment M_t bis zum Bruch belastet. Der linke Stab wurde aus dem unlegierten Baustahl S275JR gefertigt, der rechte Stab hingegen aus der Gusseisensorte EN-GJL-250.

Zeichnen Sie den zu erwartenden Bruchverlauf in die Abbildung ein und erklären Sie mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises und der in Betracht kommenden Festigkeitshypothese die unterschiedlichen Bruchformen.



Kapitel 7

Kerbwirkung

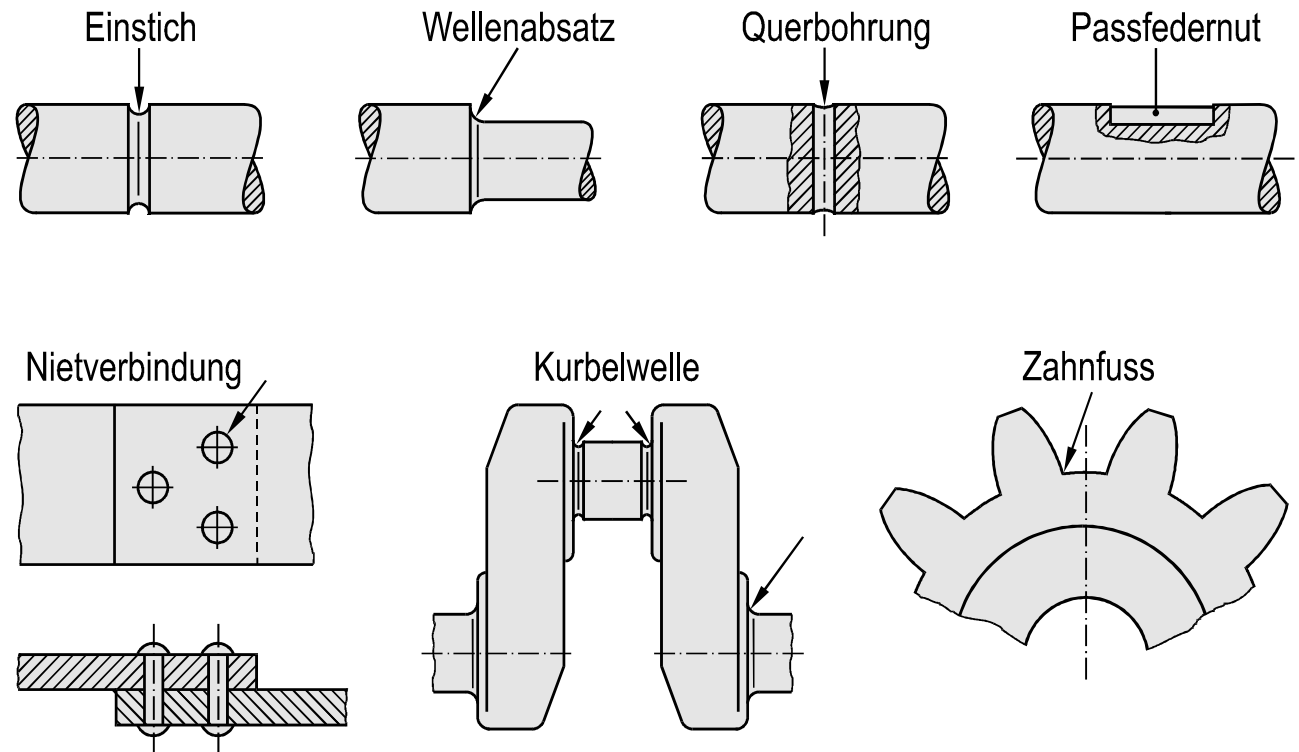
Kerbwirkung

Technische Kerben und Kerbwirkung

Technische Bauteile weisen stets mehr oder weniger abrupte Veränderungen der inneren oder äußeren Kontur auf. Diese Stellen werden als „**technische Kerben**“ bezeichnet.

Bauteilversagen unter statischer und insbesondere zeitlich veränderlicher Beanspruchung geht häufig von Kerbstellen aus, da in ihrer Umgebung der Werkstoff besonders hoch und ungünstig (mehrachsig) beansprucht wird.

Die örtliche Überhöhung der Beanspruchung (z. B. Spannung oder Dehnung) und damit eine Bruch begünstigende Wirkungsweise technischer Kerben bezeichnet man als **Kerbwirkung**.



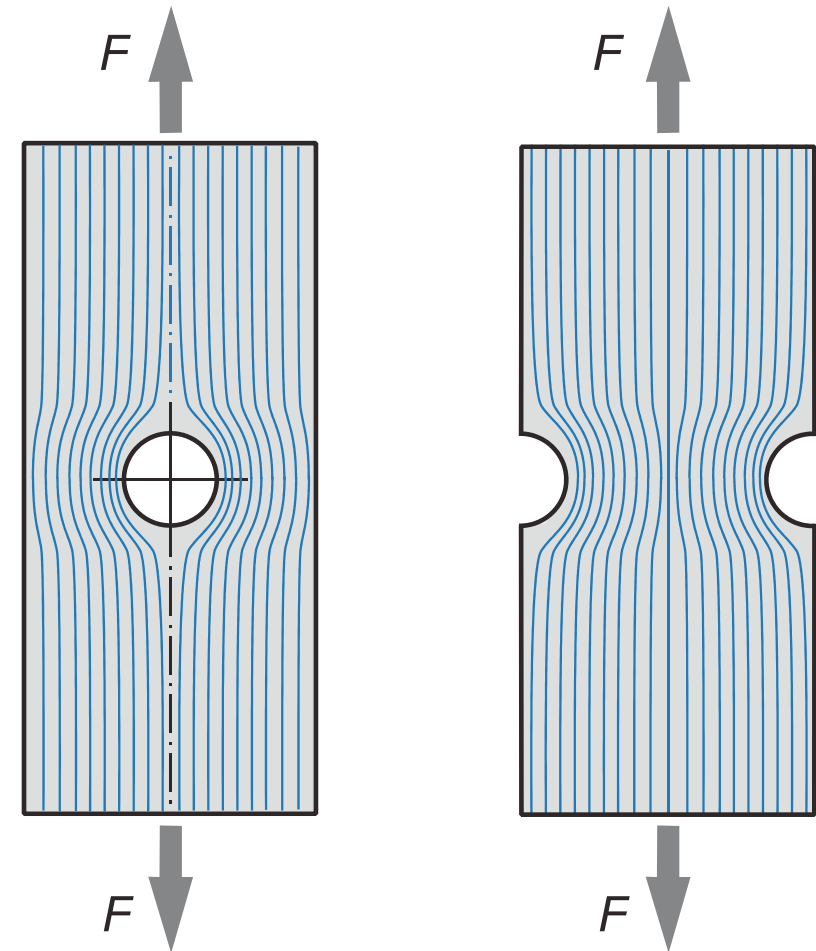
Beispiele für Formkerben

Kerbwirkung

Strömungsanalogie zur Kerbwirkung

Technische Bauteile weisen stets Stellen mit einer mehr oder weniger abrupten Veränderung der inneren oder äußeren Kontur auf, die zu einer Störung des „Kraftflusses“ führen.

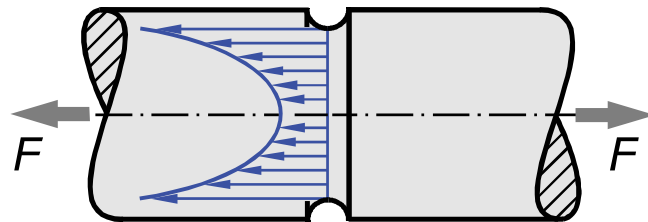
Korreliert man die Höhe der mechanischen Spannung mit der Geschwindigkeit eines strömenden, inkompressiblen Fluids, dann kann man sich die Wirkungsweise von Kerbstellen analog der Veränderung eines durchströmten Querschnitts vorstellen.



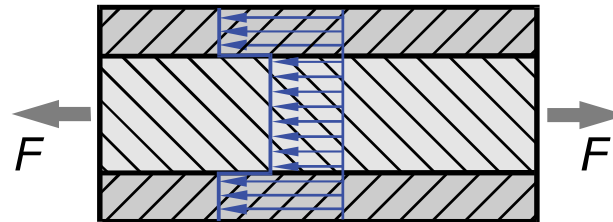
Kerbwirkung

Form-, Werkstoff- und Belastungskerbe

Neben der **Formkerbe** unterscheidet man die **Werkstoffkerbe** sowie die **Belastungskerbe**.

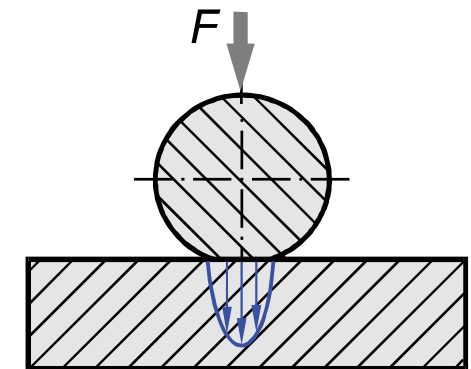


Formkerben sind konstruktiv oder fertigungstechnisch bedingte geometrische Unstetigkeiten der Bauteilgeometrie.



Werkstoffkerben sind begrenzte Bereiche unterschiedlicher Werkstoffsteifigkeit bzw. Dehngrenze in einem ansonsten homogenen Werkstoff (z. B. Einschlüsse, Randschichten).

Die inneren Grenzflächen wirken hierbei wie die freie Kerboberfläche.

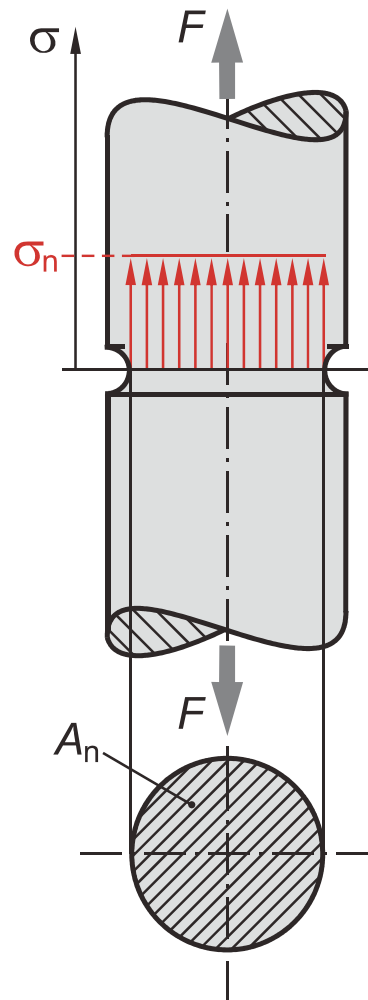


Belastungskernen sind Bereiche örtlicher Überhöhung der Beanspruchung (z. B. Stellen der Krafteinleitung oder Hertzsche Pressung).

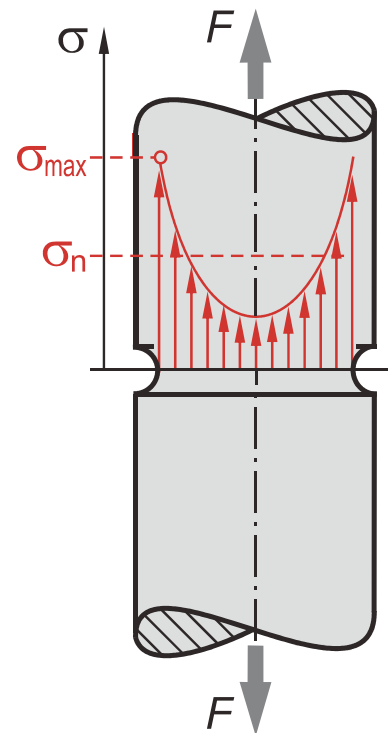
Kerbwirkung

Auswirkung technischer Kerben

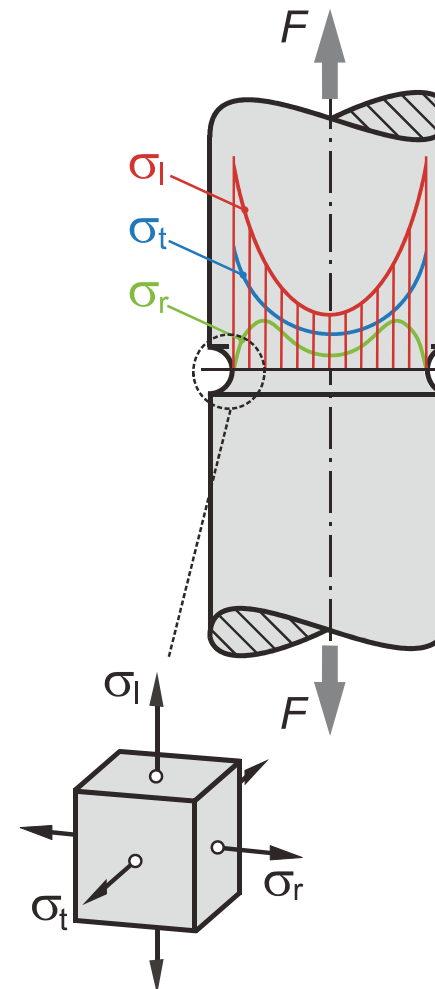
Erhöhung der
Nennspannung



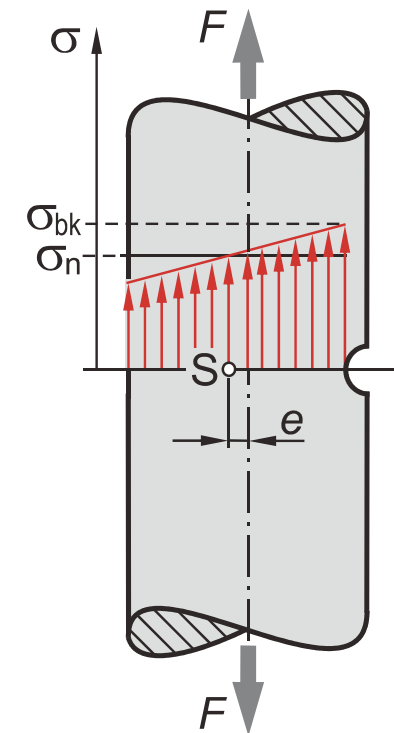
Spannungsüberhöhung
im Kerbgrund



Ausbildung eines mehr-
achsigen Spannungszu-
standes



Ausbildung von
Sekundärspannungen



Kerbwirkung

Formzahl und Formzahldiagramm

Bei statischer Beanspruchung bewirken (Form-)Kerben eine Überhöhung der inneren Beanspruchung (Spannung, Dehnung).

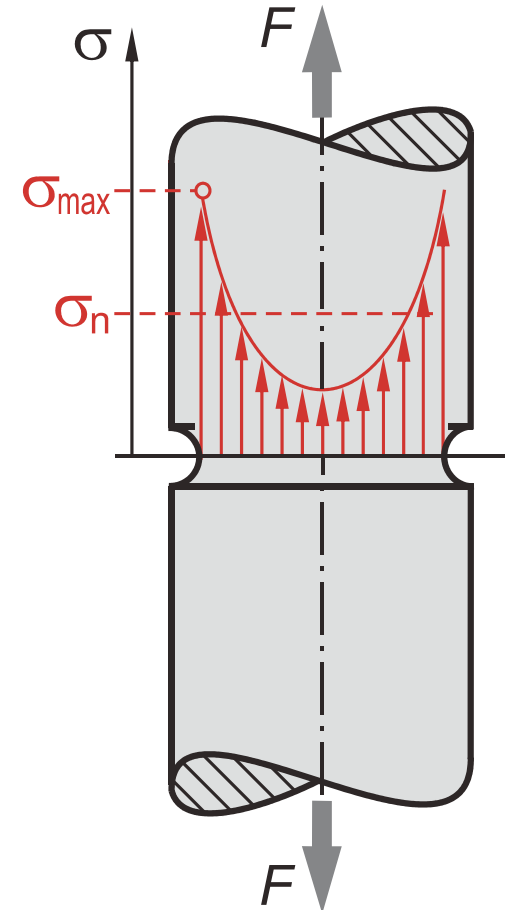
Zur Erfassung der Festigkeit mindernden Wirkung einer Formkerbe wird (bei statischer Beanspruchung) die **Formzahl** α_k eingeführt.

Die Formzahl α_k ist definiert als der Quotient aus der maximalen Spannung im Kerbgrund (σ_{\max} bzw. τ_{\max}) und der Nennspannung im Kerbquerschnitt (σ_n bzw. τ_n).

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}$$

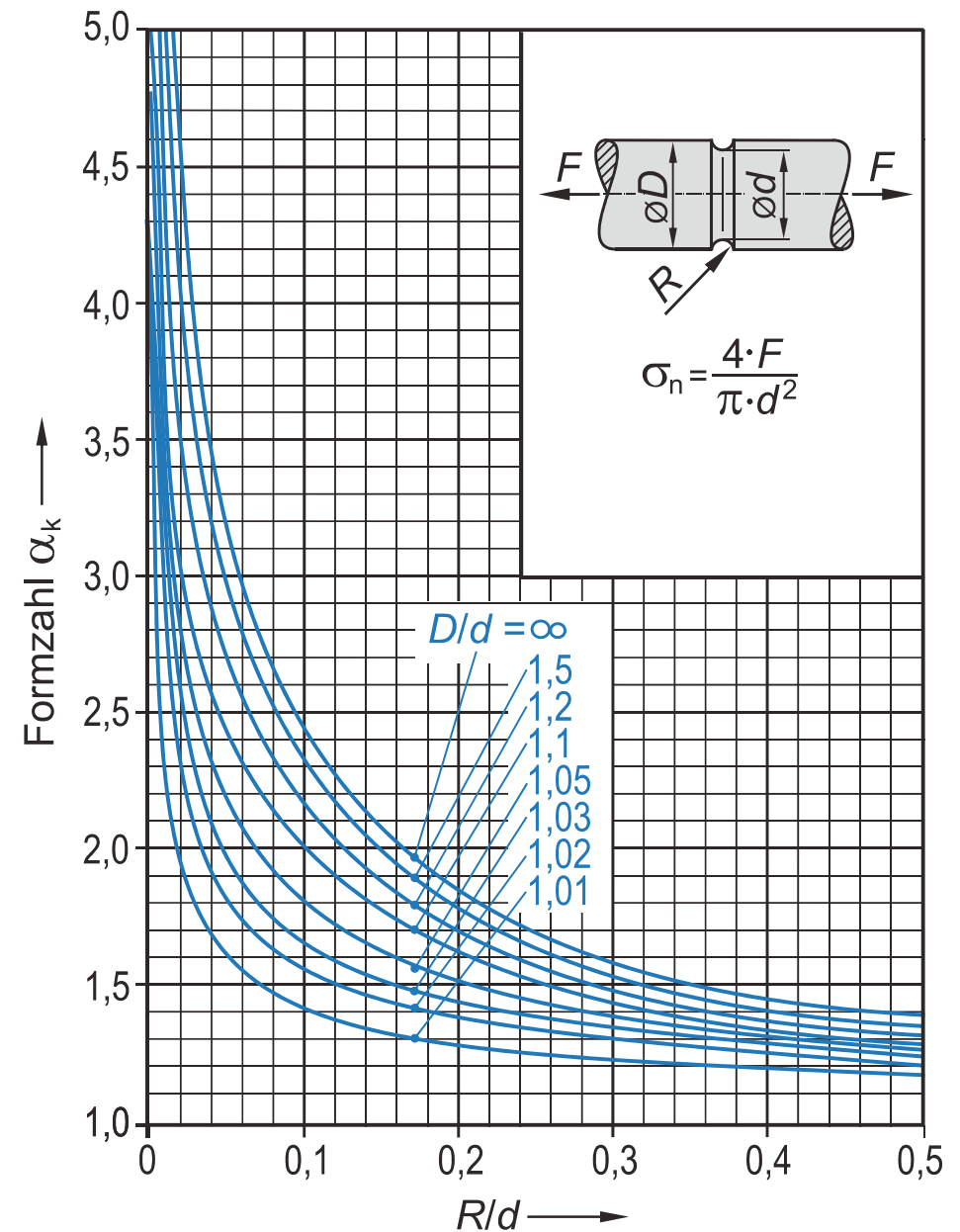
Ermittlung von Formzahlen:

1. Formulierung einer **geschlossenen Lösung** für den Spannungsverlauf im Kerbgrund (nur für relativ einfache Geometrien möglich).
2. **Rechnerisch** mit Hilfe der **Finite-Elemente-Methode (FEM)**.
3. **Experimentelle Formzahlermittlung** (z. B. mittels **Spannungsoptik** oder der **DMS-Technik**).



Kerbwirkung

Für praktische Anwendungen stehen die nach einem der vorgenannten Verfahren ermittelten Formzahlen in Form von Gleichungen oder Diagrammen, den **Formzahldiagrammen**, zur Verfügung.



Beispiel für ein Formzahldiagramm

Kerbwirkung

Kerbwirkung und Bauteilverhalten

Spröde Werkstoffe

Spröde Werkstoffe verhalten sich mehr oder weniger elastisch bis zum Bruch. Erreicht die maximale Spannung die Zugfestigkeit R_m des Werkstoffs, dann entsteht im Kerbgrund ein Riss.

Festigkeitsbedingung gekerbter Bauteile aus spröden Werkstoffen

Um einen Bruch mit Sicherheit auszuschließen, muss gelten:

$$\sigma_{\max} \leq \frac{R_m}{S_B} \quad \text{mit } \sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$$

Daraus folgt:

$$\sigma_n \leq \frac{R_m}{\alpha_k \cdot S_B}$$

Kerbwirkung

Duktile Werkstoffe

Bei der Auslegung gekerbter Bauteile ist es üblich, örtliche plastische Verformungen zuzulassen, um den Werkstoff besser auszunutzen. Die Größe der zugestandenen plastischen Dehnung ε_{pl} richtet sich im Wesentlichen nach der Verformungsfähigkeit des eingesetzten Werkstoffs.

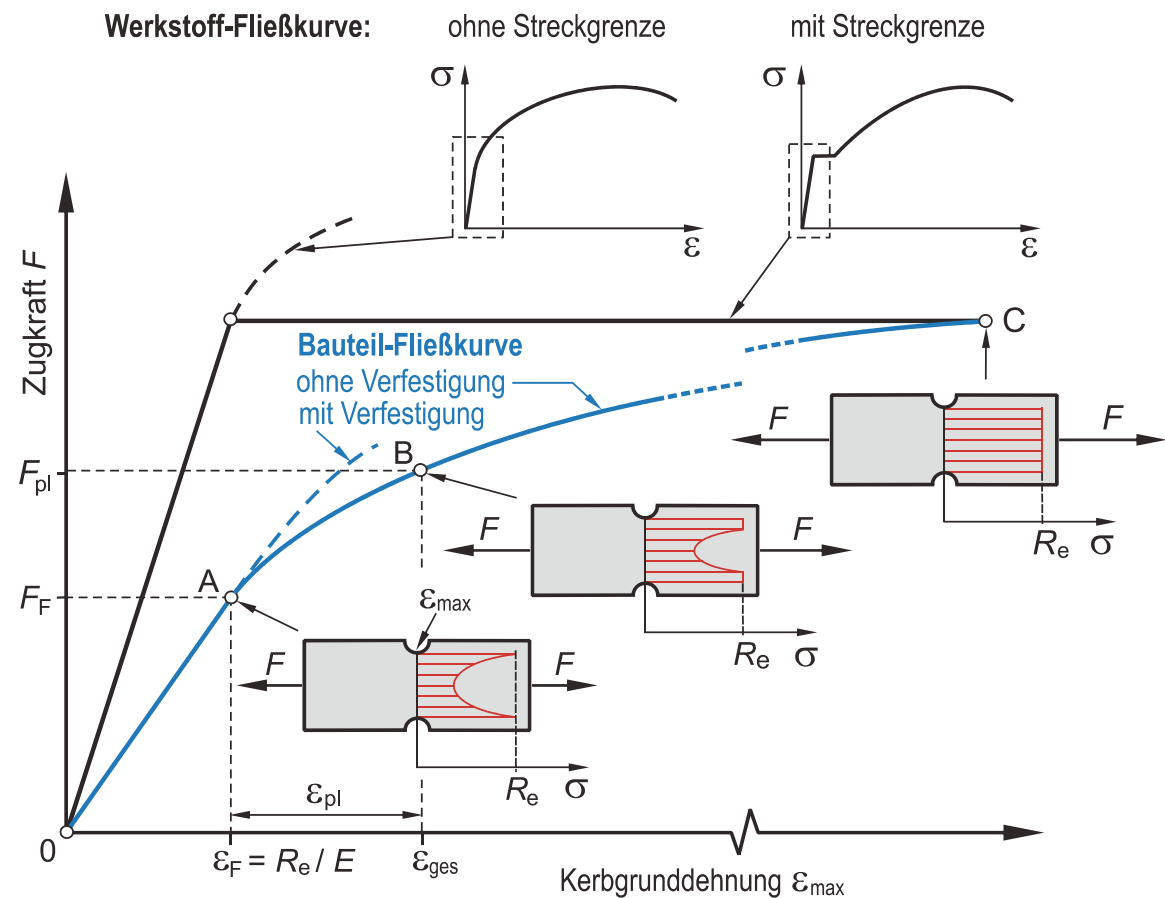
- Ferr.-perl. Stähle: $\varepsilon_{ges} = 0,5\%$
- Austenitische Stähle: $\varepsilon_{ges} = 1,0\%$

Äußere Beanspruchung bei Fließbeginn eines gekerbten Bauteils

$$F_F = \frac{R_e}{\alpha_k} \cdot A_n$$

Plastische Stützziffer

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$



Kerbwirkung

Im Falle eines linear-elastisch idealplastischen Werkstoffverhaltens kann für die plastische Stützziffer die folgende Näherungsbeziehung angesetzt werden:

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}}$$

Ist die maximal zulässige plastische Dehnung (ε_{pl}) bzw. die maximal zulässige Gesamtdehnung (ε_{ges}) an der höchst beanspruchten Stelle vorgegeben, dann kann die plastische Stützziffer (n_{pl}) und damit die maximal zulässige äußere Beanspruchung (z. B. F_{pl} , M_{pl} , oder p_{pl}) abgeschätzt werden.

Kerbwirkung

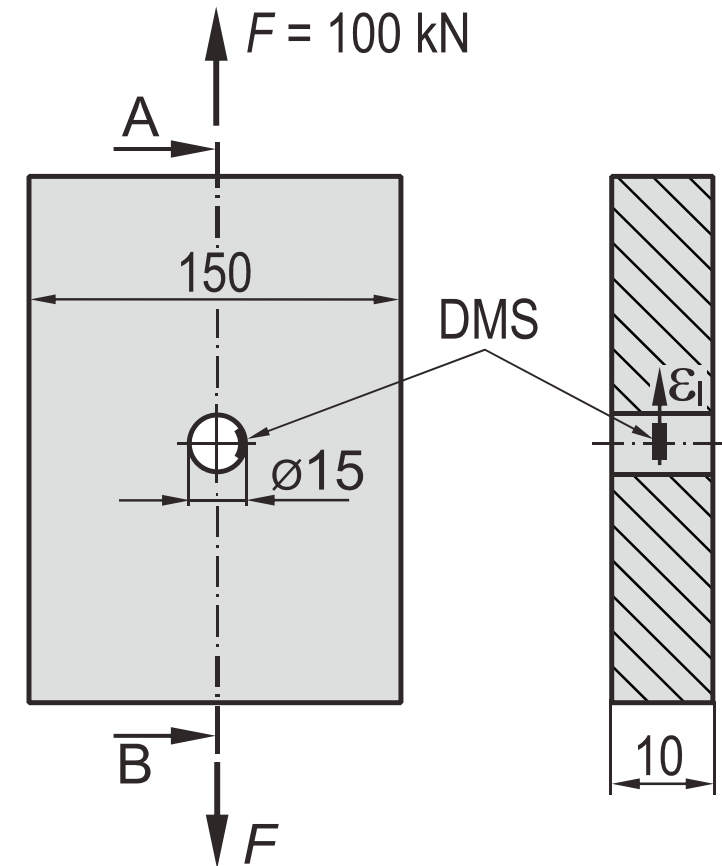
Aufgabe 7.2



Ein mittig gelochter Flachstab aus der Werkstoffsorte 17MnMoV6-4 ($E = 203000 \text{ N/mm}^2$) wird durch die statisch wirkende Zugkraft $F = 100 \text{ kN}$ belastet.

Im Kerbgrund wurde ein Dehnungsmessstreifen zur Ermittlung der Längsdehnung ε_l appliziert (siehe Abbildung). Bei der Zugkraft von $F = 100 \text{ kN}$ wird eine Längsdehnung von $\varepsilon_l = 1,00 \text{ ‰}$ gemessen.

Berechnen Sie aus dem Messwert für die Dehnung die Formzahl α_k und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe eines geeigneten Formzahldiagrammes.



Kerbwirkung

Aufgabe 7.6



Die dargestellte abgesetzte Welle aus Werkstoff 38Cr2 wird durch die statisch wirkende Kraft F_Z und das statisch wirkende Torsionsmoment M_t beansprucht. Zur Ermittlung der Belastung wurden außerdem in hinreichendem Abstand vom Wellenabsatz zwei Dehnmessstreifen (DMS) in der dargestellten Weise appliziert. Die beiden Dehnmessstreifen stehen senkrecht zueinander.

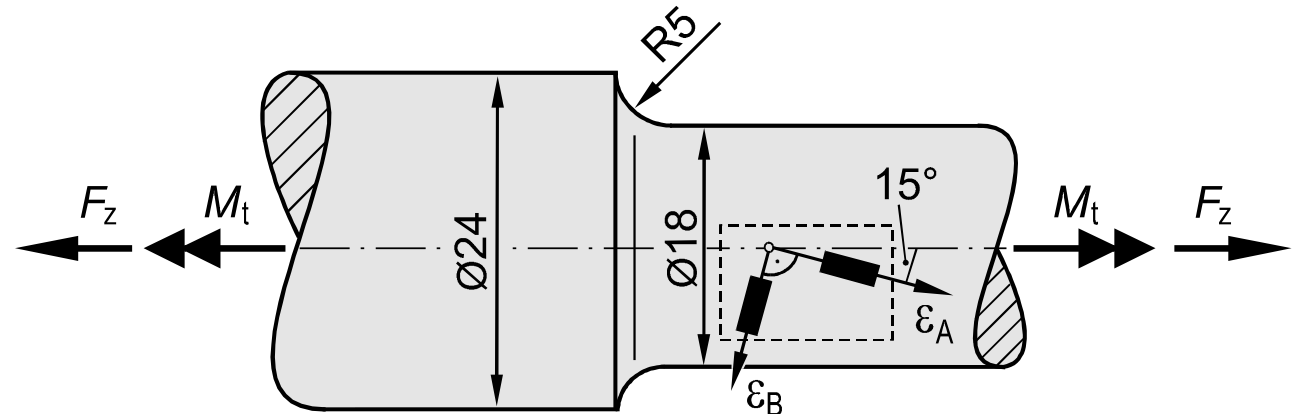
Werkstoffkennwerte 38Cr2:

$$R_{p0,2} = 510 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 760 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



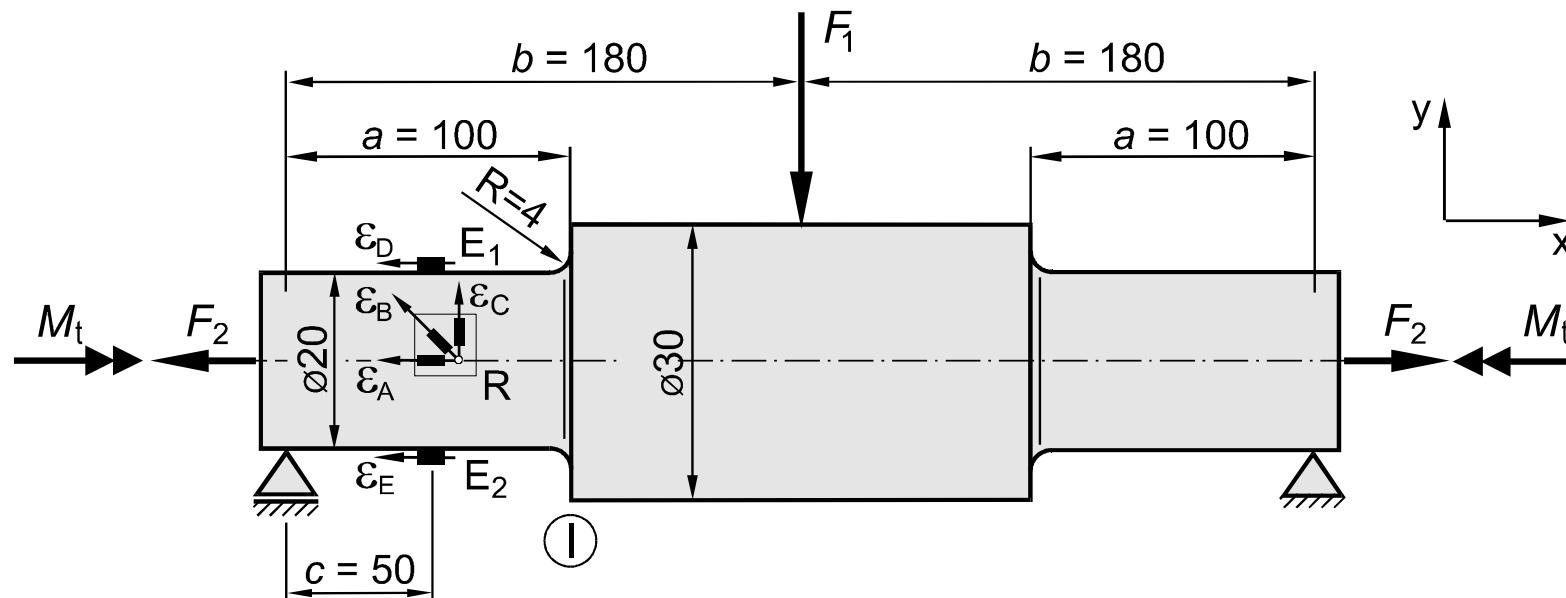
- Berechnen Sie die Dehnungen ε_A und ε_B in Messrichtung der DMS bei einer Belastung von $F_Z = 30 \text{ kN}$ und $M_t = 100 \text{ Nm}$.
- Ermitteln Sie für den Wellenabsatz für eine Beanspruchung gemäß Aufgabenteil a) die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Bestimmen Sie das maximal übertragbare Torsionsmoment M_t^* damit bei gleich bleibender Zugkraft ($F_Z = 30 \text{ kN}$) am Wellenabsatz Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,35$) ausgeschlossen werden kann.

Kerbwirkung

Aufgabe 7.8



Die Abbildung zeigt eine abgesetzte Welle mit Vollkreisquerschnitt aus unlegiertem Vergütungsstahl C45E ($R_e = 340 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 620 \text{ N/mm}^2$; $E = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$).



Die Welle wird durch die mittig angreifende Querkraft $F_1 = 1050 \text{ N}$ und das Torsionsmoment $M_t = 72 \text{ Nm}$ statisch beansprucht. Die Zugkraft F_2 wirkt zunächst nicht ($F_2 = 0$).

- Berechnen Sie das Biegemoment im Kerbgrund (Stelle I).
- Bestimmen Sie für die Kerbstelle I die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) und Gewaltbruch (S_B). Sind die Sicherheiten ausreichend?

Kerbwirkung

Die Welle wird nun durch eine baugleiche Welle aus dem legierten Vergütungsstahl 50CrV4 ersetzt ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1100 \text{ N/mm}^2$; $E = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$).

- c) Ermitteln Sie das maximal übertragbare Torsionsmoment M_t^* damit bei gleich bleibender Querkraft F_1 kein Fließen im Kerbgrund eintritt (Zugkraft $F_2 = 0$).

Die Welle unterliegt nun einer unbekannten Betriebsbeanspruchung. Die Querkraft F_1 und die Zugkraft F_2 sowie das Torsionsmoment M_t sind nicht bekannt. Zur Ermittlung der Kräfte und des Torsionsmomentes werden in hinreichendem Abstand vom Wellenabsatz (die Kerbwirkung kann unberücksichtigt bleiben) in der skizzierten Weise eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette (R) sowie zwei einzelne DMS ($E1$ und $E2$) in Längsrichtung appliziert. Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen ermittelt:

$$\varepsilon_A = 1,300 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_B = 0,065 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_C = -0,390 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_D = 1,050 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_E = 1,550 \text{ ‰}$$

- d) Ermitteln Sie anhand der Dehnungswerte die Zugkraft F_2 .
- e) Berechnen Sie die Querkraft F_1 .
- f) Ermitteln Sie Betrag und Drehsinn des Torsionsmomentes M_t .
- g) Berechnen Sie unter Betriebsbeanspruchung die Sicherheit S_F gegen Fließen im Kerbquerschnitt I ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$).

Kapitel 8

Knickung von Stäben

Knickung von Stäben

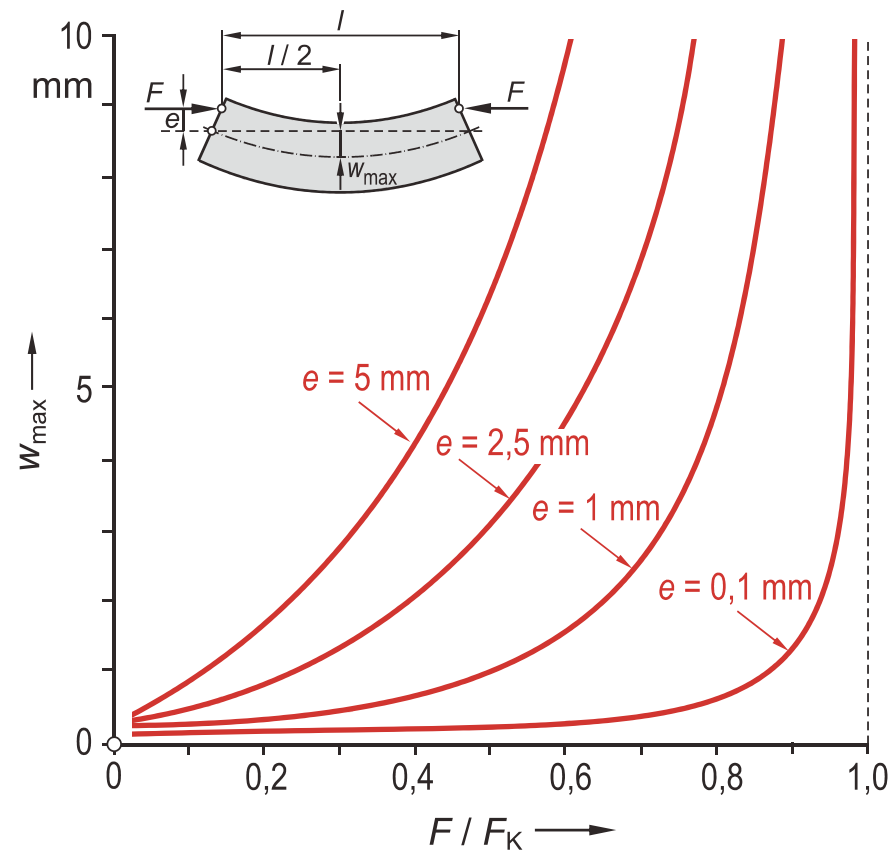
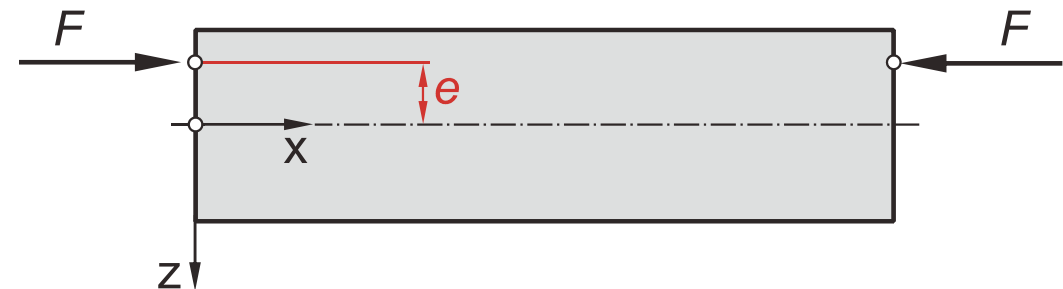
Knickung bei außermittigem Kraftangriff

Knickkraft eines beidseitig gelenkig gelagerten und außermittig beanspruchten Stabes:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2}$$

Maximale Durchbiegung eines an beiden Enden gelenkig gelagerten und außermittig beanspruchten Stabes

$$w_{\max} = \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_K}}\right)} - e$$

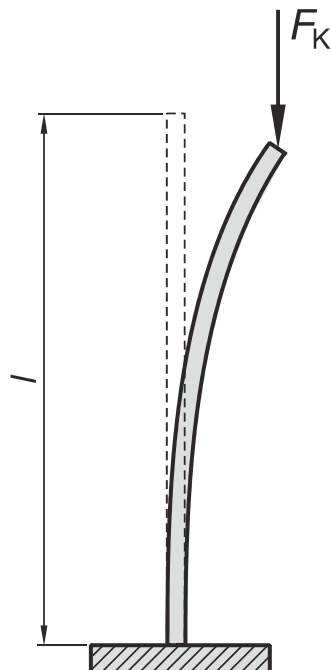


Knickung von Stäben

Knickung bei mittigem Kraftangriff

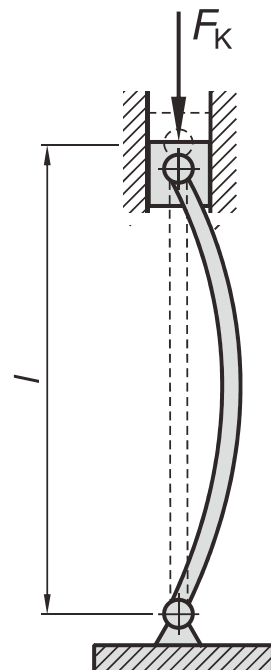
Eulersche Knickfälle

Knickfall 1



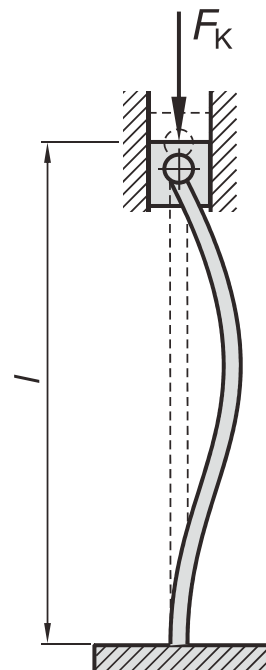
$$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Knickfall 2



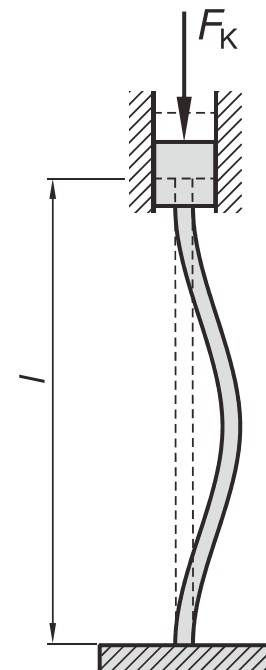
$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Knickfall 3



$$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Knickfall 4



$$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Knickung von Stäben

Spannungsermittlung

Knickspannung: $\sigma_K = \frac{F_K}{A}$

Zulässige Spannung

Duktile Werkstoffe bzw. duktiles Werkstoffverhalten

- Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F}$ bzw. $\frac{\sigma_{d0,2}}{S_F}$ mit $S_F = 1,2 \dots 2,0$
- Knickung: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$ mit $S_K = 2,5 \dots 5,0$

Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B}$ mit $S_B = 4,0 \dots 9,0$
- Knickung: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$ mit $S_K = 2,5 \dots 5,0$

Knickung von Stäben

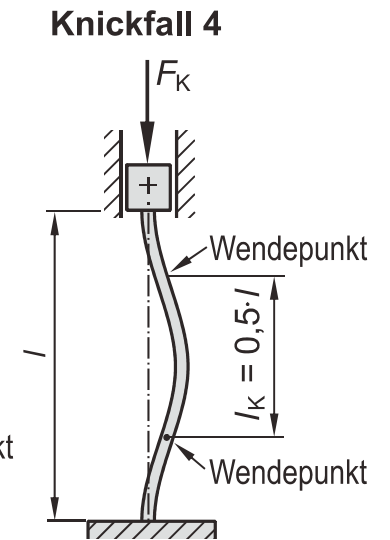
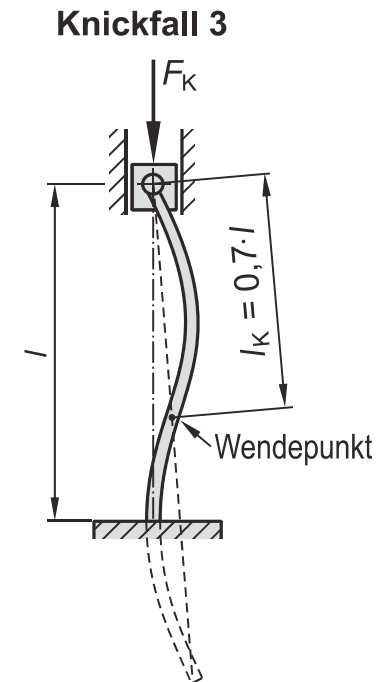
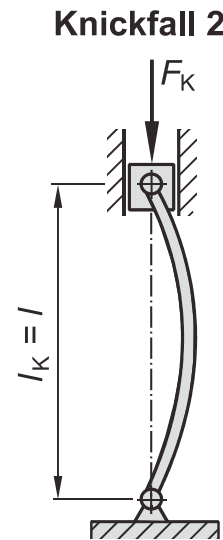
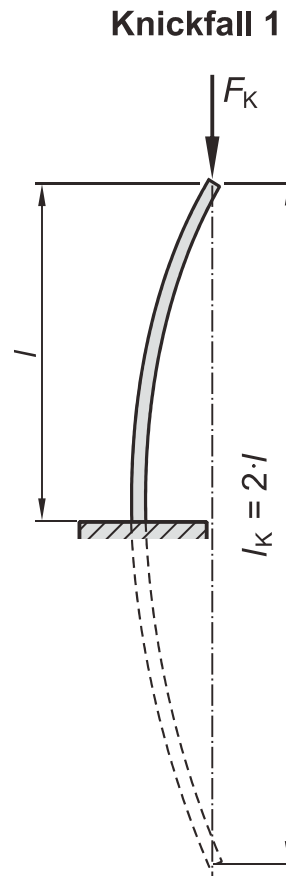
Knicklänge

Knickfall 1: $l_K = 2 \cdot l$

Knickfall 2: $l_K = l$

Knickfall 3: $l_K \approx 0,7 \cdot l$

Knickfall 4: $l_K = 0,5 \cdot l$



Knickung von Stäben

Knickspannungsdiagramm

Definition des Schlankheitsgrades

$$\lambda = \frac{l_K}{\sqrt{I / A}}$$

Euler-Gleichung

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

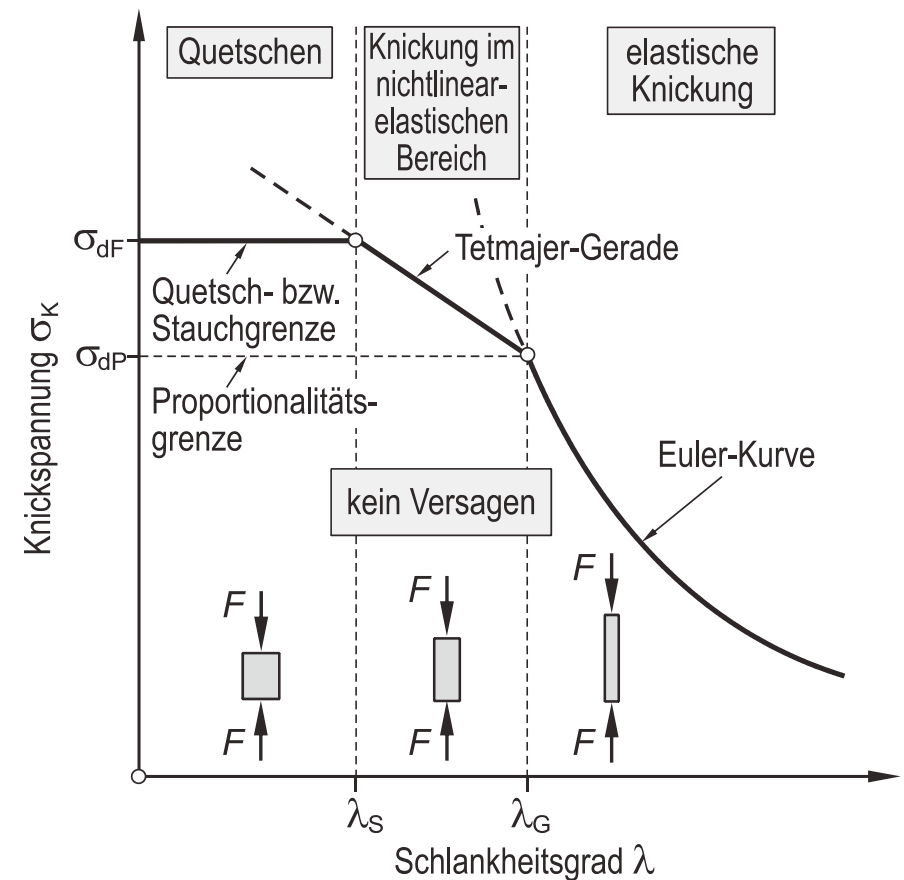
Tetmajer-Gleichung

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

Werkstoff	a	b N/mm ²	c	Gültigkeit
EN-GJL-200	776	12	0,053	$0 < \lambda < 80$
S235JR	310	1,14	0	$60 < \lambda < 104$
E335	335	0,62	0	$0 < \lambda < 88$

Grenzschlankheitsgrad für elastische Knickung (Euler-Bereich)

$$\lambda_G = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dP}}}$$



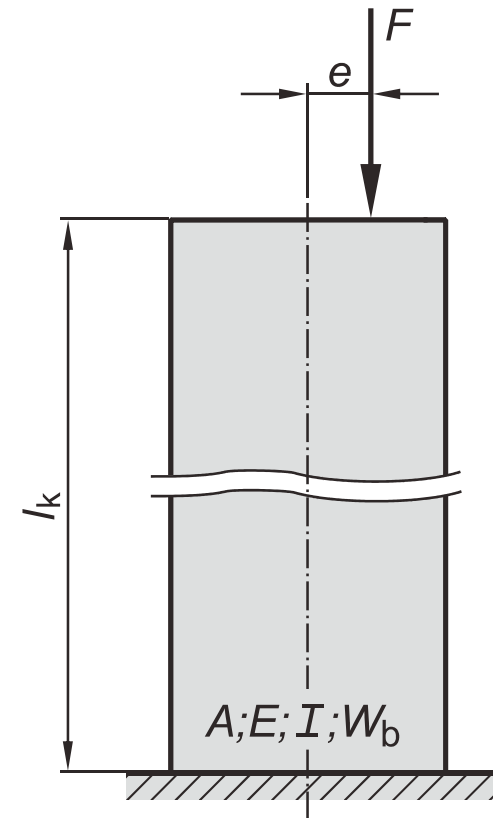
Knickung von Stäben

Biegeknickung

Durch Fertigungs- oder Montageungenauigkeiten ist in der Praxis stets mit einer gewissen Exzentrizität e der Druckkraft zu rechnen. Dann überlagert sich der Druckspannung $\sigma_d = F / A$ noch ein Biegeanteil $\sigma_b = M_b / W_b$. Die Gesamtspannung σ_{ges} ergibt sich dann zu:

$$\sigma_{ges} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)}$$

Bei größerer Exzentrizität e kann die Spannung σ_{ges} bereits lange vor einer Knickung unzulässig hohe Werte erreichen. Da bei Druckstäben die Exzentrizität e nur schwer abzuschätzen ist, wird in der Praxis daher meist mit hohen Sicherheitsbeiwerten gegen Knickung (z. B. $S_B = 2,5 \dots 5,0$) gerechnet.



Knickung von Stäben

Aufgabe 8.2



Ein Profilstab aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR mit einer Länge von $l = 1500$ mm und der dargestellten Querschnittsfläche, wird durch eine im Flächenschwerpunkt S angreifende Druckkraft F_d statisch beansprucht. Der Profilstab ist an beiden Enden gelenkig gelagert.

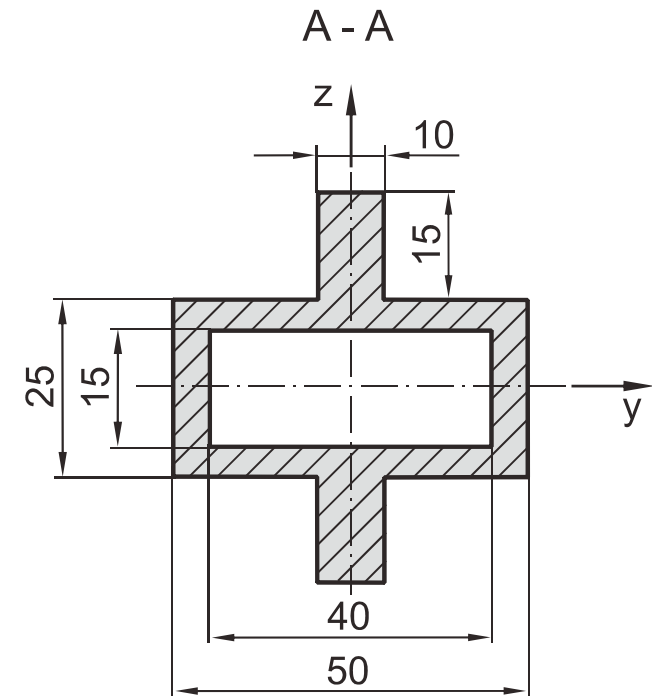
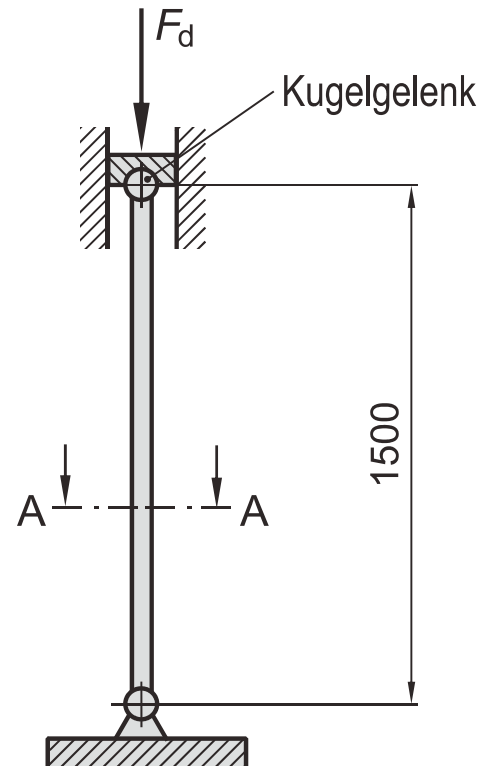
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 255 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 510 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie für den dargestellten Querschnitt die axialen Flächenmomente 2. Ordnung bezüglich der y-Achse (I_y) sowie bezüglich der z-Achse (I_z).
- Ermitteln Sie die zulässige Druckbelastung F_d des Profilstabes ($S_K = 4$ und $S_F = 1,5$).
- Berechnen Sie die Verkürzung Δl des Profilstabes unmittelbar vor dem Versagen.

Knickung von Stäben

Aufgabe 8.4



Der dargestellte Wandkran ist an seinem linken Ende gelenkig gelagert. An seinem freien, rechten Ende greift eine statisch wirkende Kraft $F = 800 \text{ kN}$ an. Der Kranausleger wird durch einen Stützstab aus unlegiertem Baustahl (S235JR) abgestützt und kann als beidseitig gelenkig gelagert angesehen werden.

Werkstoffkennwerte S235JR:

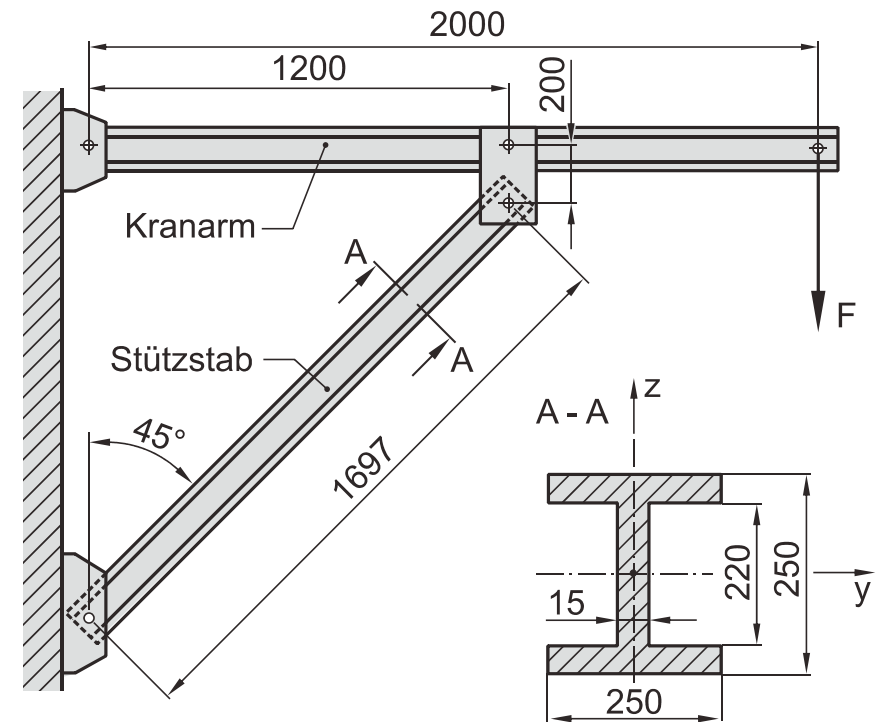
$$R_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 440 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie die Druckkraft F_d , die auf den Stützstab wirkt.
- Bestimmen Sie für die Querschnittsfläche des Stützstabes das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y-Achse (I_y).
- Ermitteln Sie für den Stützstab die Sicherheiten gegen Fließen und gegen Knickung. Sind die Sicherheiten ausreichend?



Knickung von Stäben

Aufgabe 8.7



Die Stütze eines Stahlgerüsts aus Werkstoff S275J0 hat einen Kreisringquerschnitt und soll eine axiale Druckkraft von $F = 150 \text{ kN}$ aufnehmen. Die Länge der Stütze beträgt $l = 1500 \text{ mm}$ und der Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$. Die Stütze kann an ihrem unteren Ende als fest eingespannt und am oberen Ende als frei beweglich betrachtet werden.

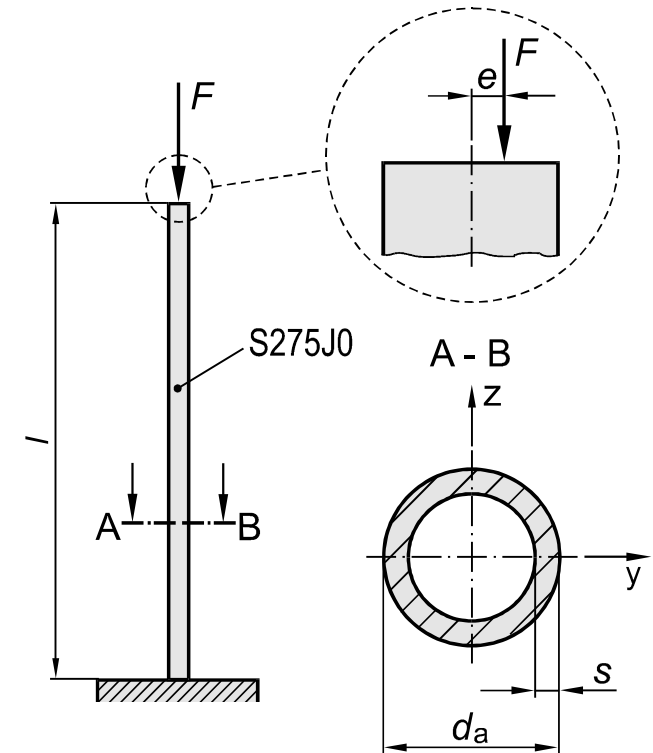
- Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit die Belastung von $F = 150 \text{ kN}$ mit der notwendigen Sicherheit ($S_F = 1,5$ und $S_K = 3,0$) ertragen werden kann. Die Druckkraft F soll zunächst als mittig angreifend ($e = 0$) betrachtet werden.
- Aufgrund von Montageungenauigkeiten ist es möglich, dass die Druckkraft außermittig angreift ($e \neq 0$). Bestimmen Sie die maximal zulässige Exzentrizität e , damit eine Sicherheit von $S_F = 1,2$ gegen Fließen gegeben ist. Die Wandstärke der rohrförmigen Stütze soll $s = 5 \text{ mm}$ betragen.

Werkstoffkennwerte S275J0:

$$R_e = 290 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 560 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$



Kapitel 9

Schiefe Biegung

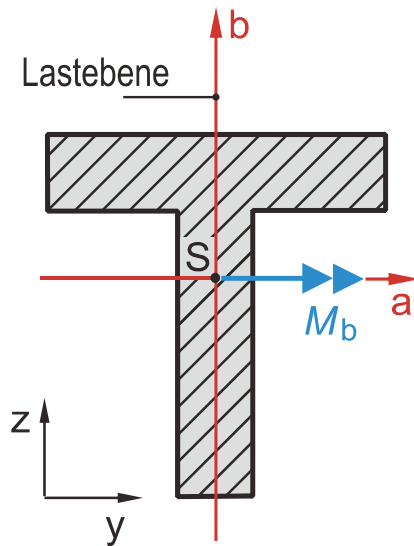
Schiefe Biegung

Gerade und schiefe Biegung

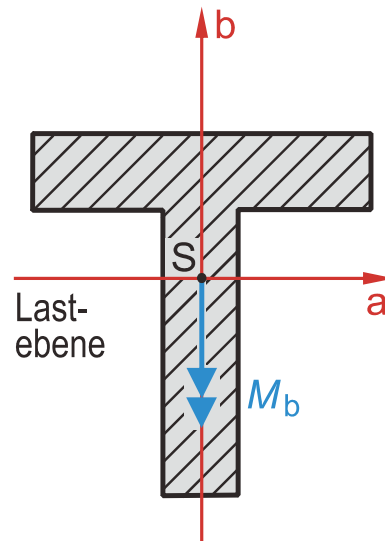
Gerade Biegung

Biegemomentenvektor fällt mit einer der Hauptachsen zusammen

a) Belastung in der Symmetrieebene



b) Belastung senkrecht zur Symmetrieebene



a, b Hauptachsen der Fläche

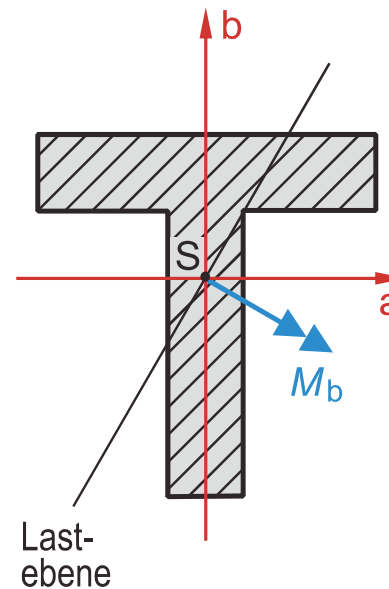
Hauptachsen:

Zwei zueinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt einer Fläche bezüglich derer die axialen Flächenmomente 2. Ordnung Extremwerte annehmen d. h. das gemischte Flächenmoment Null wird, werden als **Hauptachsen** bezeichnet. Für einfach symmetrische Querschnitte (z. B. T-Profil) sind die Symmetrieachse und deren Senkrechte durch den Flächenschwerpunkt S stets Hauptachsen.

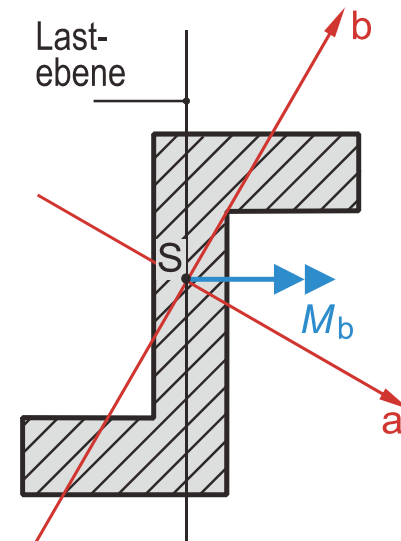
Schiefe Biegung

Biegemomentenvektor fällt nicht mit einer der Hauptachsen zusammen

c) symmetrischer Querschnitt



d) unsymmetrischer Querschnitt



Schiefe Biegung

Flächenmomente

Flächenmomente sind Rechengrößen in Form von Integralen.

Man unterscheidet:

- Flächenmomente 1. Ordnung
- Flächenmomente 2. Ordnung

Schiefe Biegung

Flächenmomente 1. Ordnung (statische Momente)

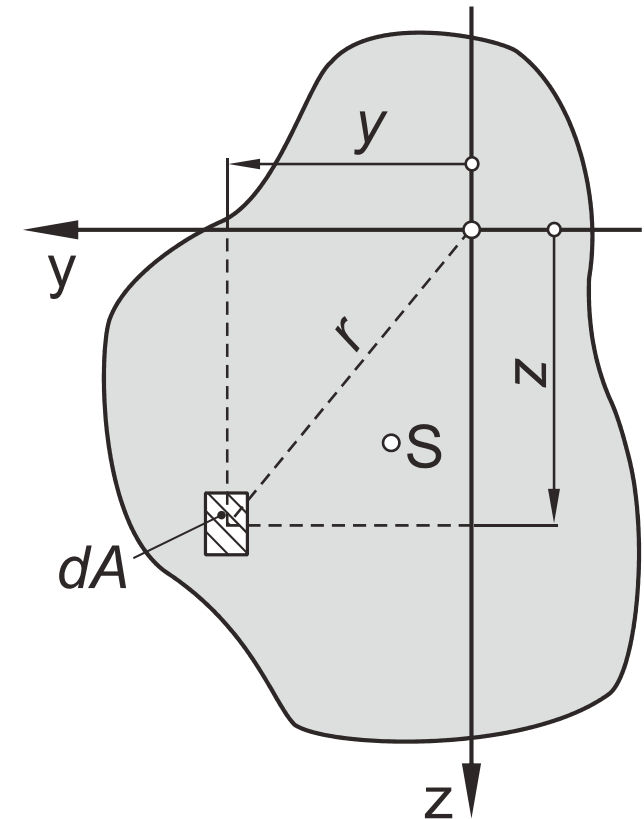
Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der y-Achse:

$$H_y = \int_A z \cdot dA$$

Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der z-Achse:

$$H_z = \int_A y \cdot dA$$

Die Flächenmomente sind von erster Ordnung, da die Integranden (z. B. die Koordinaten y oder z) in der ersten Potenz auftreten. Die Dimension des Flächenmomentes 1. Ordnung ist beispielsweise m^3 , cm^3 oder mm^3 .



Schiefe Biegung

Für die Ermittlung von Flächenmomenten 1. Ordnung gilt:

- Flächenmomente 1. Ordnung können in Abhängigkeit der Lage der Bezugsachse positive oder negative Zahlenwerte annehmen.
- Flächenmomente 1. Ordnung sind von der Lage der Bezugsachsen abhängig. Bezüglich Achsen durch den Flächenschwerpunkt S (Schwereachsen) sind die Flächenmomente 1. Ordnung Null.
- Bei symmetrischen Querschnittsflächen sind die Flächenmomente 1. Ordnung bezüglich der Symmetrieachse(n) Null.

Schiefe Biegung

Flächenmomente 2. Ordnung

Flächenmomente 2. Ordnung werden unterschieden in:

- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung (z. B. I_y und I_z)
- Polare Flächenmomente (z. B. I_p)
- Gemischte Flächenmomente (z. B. I_{yz})

Axiale Flächenmomente 2. Ordnung

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$

Die Zahlenwerte axialer Flächenmomente 2. Ordnung sind von der Geometrie der Querschnittsfläche sowie von der Lage der Bezugsachse abhängig und nehmen stets positive Werte an.

Schiefe Biegung

Polare Flächenmomente

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA$$

Das polare Flächemoment I_p hat eine Bedeutung in Bezug auf die Berechnung von Schubspannungen bei Torsion kreissymmetrischer Querschnitte.

Gemischte Flächenmomente

Gemischtes Flächenmoment bezüglich des y-z-Koordinatensystems:

$$I_{yz} = - \int_A y \cdot z \cdot dA$$

Das gemischte Flächenmoment kann abhängig von der Verteilung der Querschnittsfläche über die einzelnen Quadranten des Koordinatensystems, Werte annehmen, die größer, gleich oder kleiner Null sind.

Schiefe Biegung

Abhängigkeit der Flächenmomente 2. Ordnung von der Lage des Koordinatensystems

Parallelverschiebung des Koordinatensystems (Satz von Steiner)

Durch eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen ändert sich der Betrag der axialen und des gemischten Flächenmomentes.

Axiale Flächenmomente

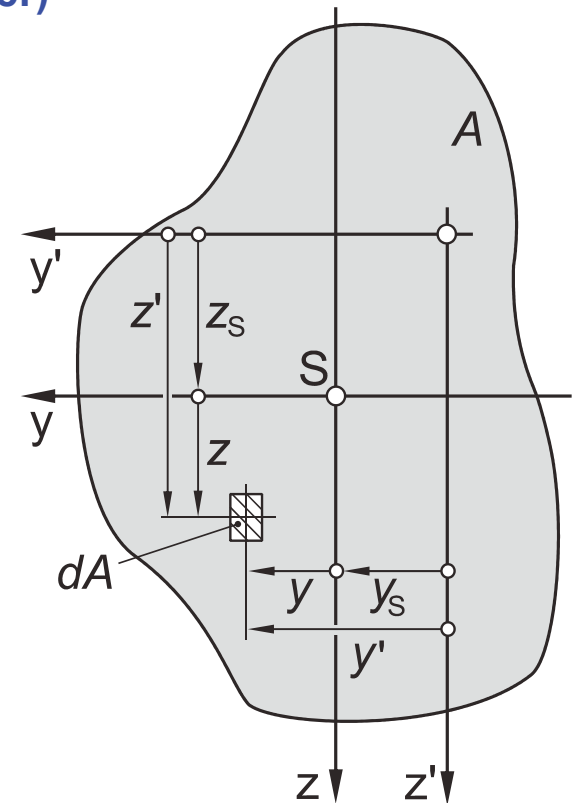
$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A$$

- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung (I_y und I_z) haben in Bezug auf Achsen durch den Flächenschwerpunkt Kleinstwerte im Vergleich zu parallel verschobenen Bezugsachsen.

Gemischte Flächenmomente

$$I_{y'z'} = I_{yz} - y_S \cdot z_S \cdot A$$

- Bei der Anwendung der Gleichung sind die Vorzeichen von y_S und z_S in Bezug auf das gewählte Koordinatensystem zu berücksichtigen.
- Das gemischte Flächenmoment (I_{yz}) ändert seinen Betrag nicht, falls nur eine Achse parallel verschoben wird.



Schiefe Biegung

Bei der Anwendung des Steinerschen Satzes ist zu beachten:

- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung die sich auf dieselbe Achse beziehen bzw. gemischte Flächenmomente die sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, dürfen addiert oder subtrahiert werden.
- Der Steinersche Satz stellt stets einen Zusammenhang zwischen den Flächenmomenten bezüglich einer *Achse durch den Flächenschwerpunkt* bzw. eines *Koordinatensystems mit Ursprung im Flächenschwerpunkt* und einer dazu parallelen Achse bzw. eines parallel verschobenen Koordinatensystems her.
- Der Steinersche Satz darf *nicht* angewandt werden, um eine Beziehung zwischen den Flächenmomenten bezüglich beliebiger Achsen bzw. Koordinatensysteme herzustellen.

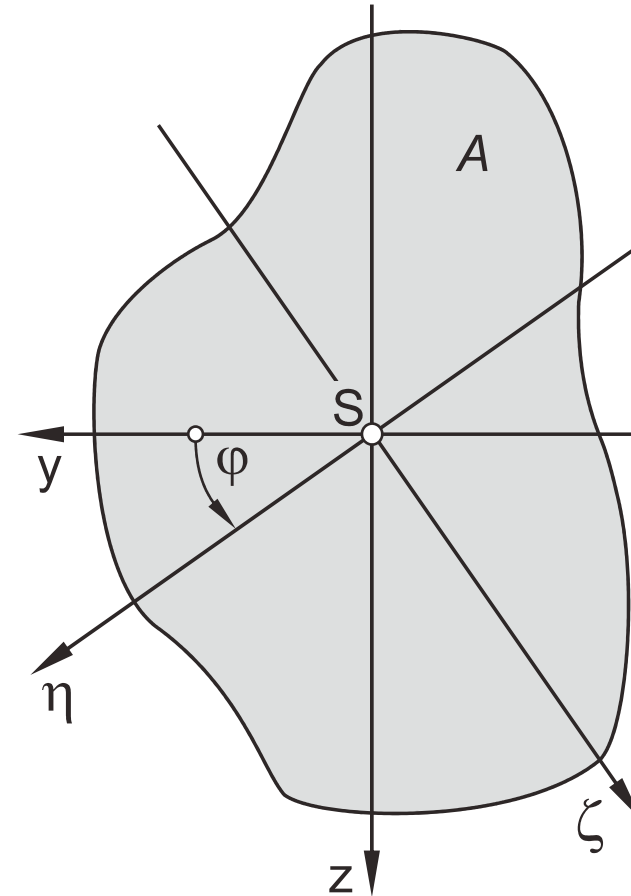
Schiefe Biegung

Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt

$$I_{\eta} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\zeta} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\varphi + I_{yz} \cdot \cos 2\varphi$$



Schiefe Biegung

Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten oder zweiten Hauptachse

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$$

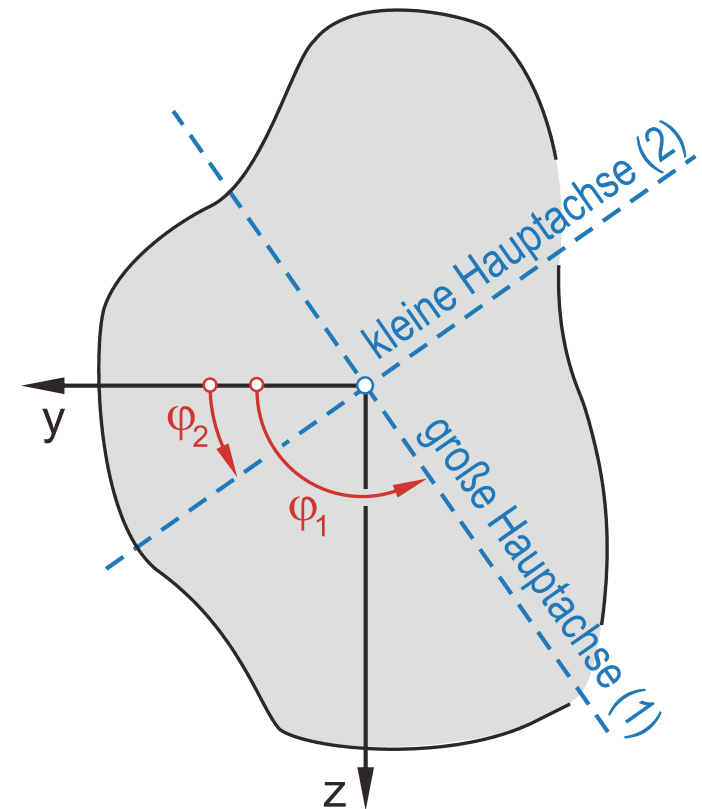
falls $-2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin 2\varphi < 0$ dann ist $\varphi = \varphi_1$

falls $-2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin 2\varphi > 0$ dann ist $\varphi = \varphi_2$

Aufgrund der π -Periodizität des Tangens ergibt sich der zweite Winkel zu:

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + 90^\circ$$

Bei symmetrischen Flächen ist das gemischte Flächenmoment (I_{yz}) in Bezug auf ein die Symmetrieachse beinhaltenes Achsensystem Null. Die Symmetrieachse und die hierzu senkrechte Achse durch den Flächenschwerpunkt S sind also stets Hauptachsen.



Schiefe Biegung

Hauptflächenmomente

Maximales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)

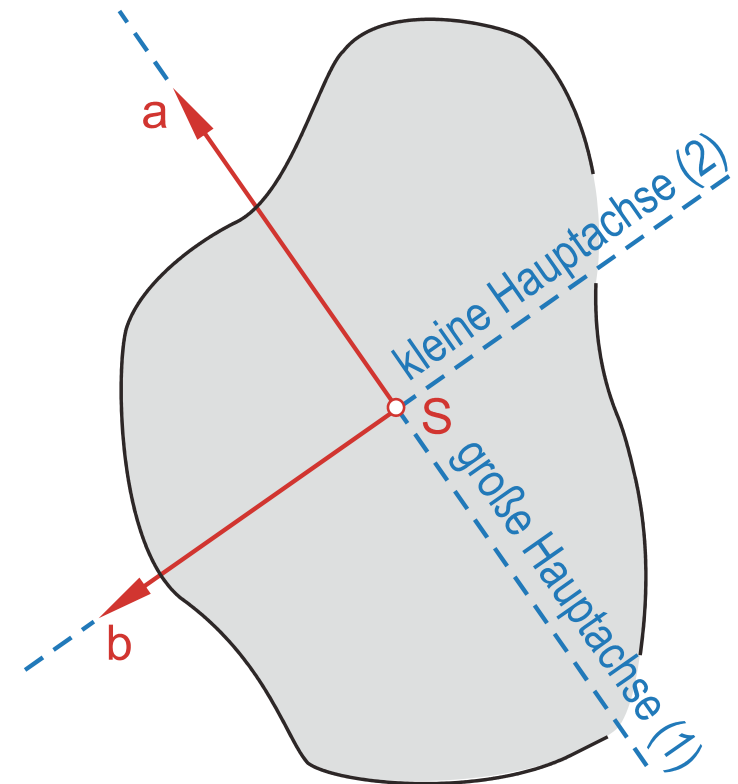
$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Schiefe Biegung

Spannungsermittlung bei schiefer Biegung

Vorgehensweise zur Spannungsermittlung bei schiefer Biegung

1. Ermittlung der Lage der beiden Hauptachsen (1) und (2) der Querschnittsfläche sowie der zugehörigen Hauptflächenmomente I_1 und I_2 . Die große Hauptachse wird mit Index „1“, die kleine Hauptachse mit Index „2“ gekennzeichnet.
2. Festlegung eines a-b-Koordinatensystems wie folgt:
 - a-Koordinatenrichtung fällt mit der großen Hauptachse (1) zusammen
 - b-Koordinatenrichtung fällt mit der kleinen Hauptachse (2) zusammen
 - b-Richtung geht aus a-Richtung durch eine Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn hervor.

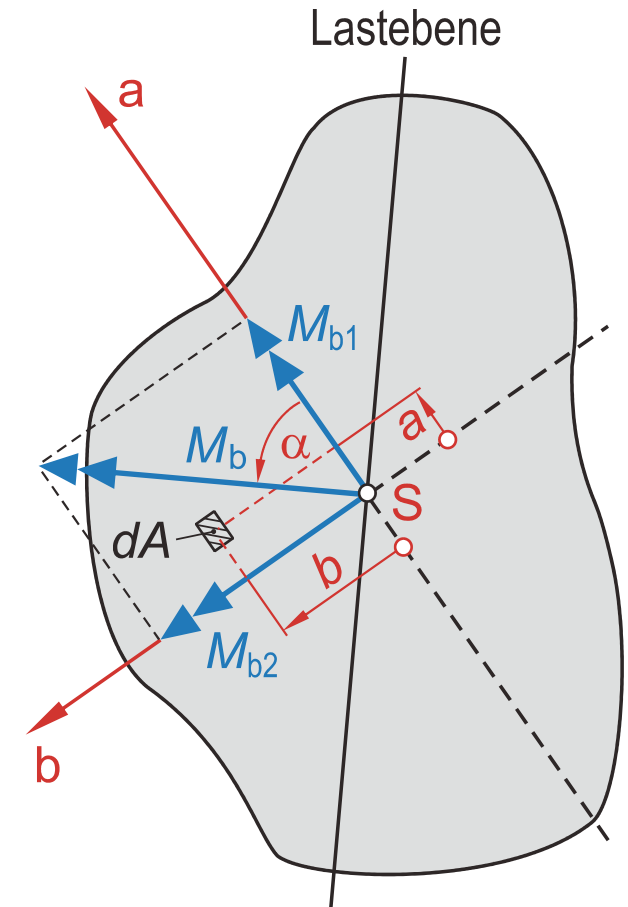


Schiefe Biegung

3. Einführung des Richtungswinkels α zwischen der a-Achse und dem Biegemomentenvektor M_b
 - Winkel α wird von der positiven a-Achse aus abgetragen
 - Winkel α im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt
4. Berechnung der Spannung σ_x in einem beliebigen Punkt (Koordinaten a und b) der Querschnittsfläche

$$\sigma_x = M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right)$$

Die Abstände a und b sind entsprechend des festgelegten a-b-Koordinatensystems *vorzeichengerecht* einzusetzen.



Schiefe Biegung

Nulllinie

Unter der **(Spannungs-)Nulllinie** bei Biegung versteht man denjenigen geometrischen Ort aller Punkte innerhalb der Querschnittsfläche, an deren Stelle die Biegespannung zu Null wird. Sie ist die Schnittgerade der neutralen Faser mit der Querschnittsfläche.

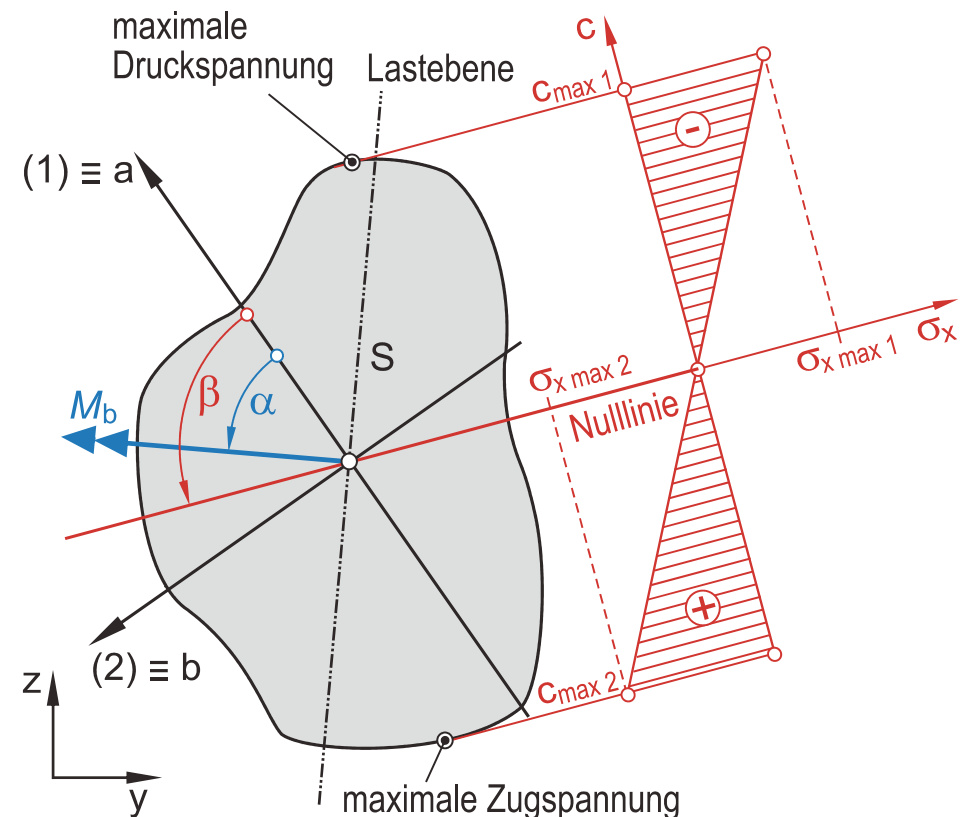
Gleichung der Nulllinie im a-b-Koordinatensystem

$$b(a) = \frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \cdot a$$

Winkel zwischen a-Achse und Nulllinie

$$\beta = \arctan \left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \right)$$

Die maximale Spannung findet sich im maximalen senkrechten Abstand c_{\max} von der Nulllinie.



Schiefe Biegung

Alternative Möglichkeit zur Berechnung der Biegespannung

Maximale Biegespannung in der Querschnittsfläche

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{\max}$$

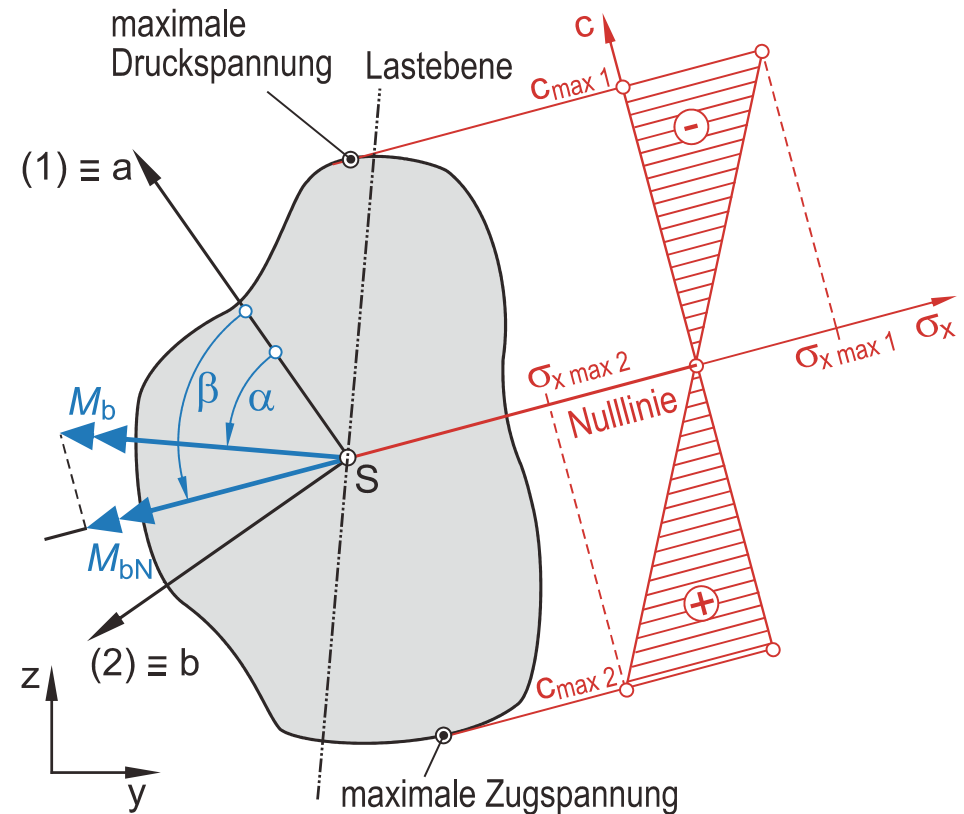
mit $M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha)$

Biegemoment in Bezug auf die Nulllinie

$$\text{und } I_N = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung
bezüglich der Nulllinie

Für die Anwendung der Gleichung für M_{bN} ist zu berücksichtigen, dass die Winkel α und β gleichsinnig von der a-Achse aus angetragen werden müssen. Gegebenenfalls muss anstelle des errechneten Winkels β (siehe Folie 9-15) sein Nebenwinkel eingesetzt werden.



Schiefe Biegung

Aufgabe 9.1



Die Abbildung zeigt einen einseitig eingespannten Kastenträger mit Rechteckquerschnitt aus einem vergüteten Feinkornbaustahl (S890QL). Der Träger wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Kraft $F = 100 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Flächenschwerpunkt. Schubspannungen durch Querkkräfte, das Eigengewicht des Kastenträgers sowie eine eventuelle Kerbwirkung am Einspannquerschnitt sind zu vernachlässigen.

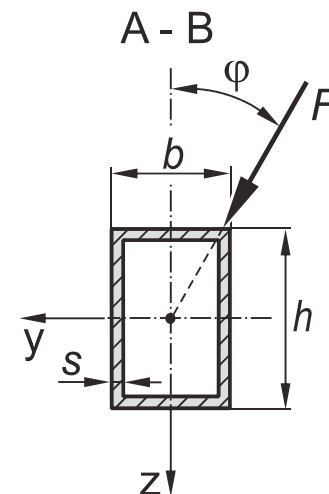
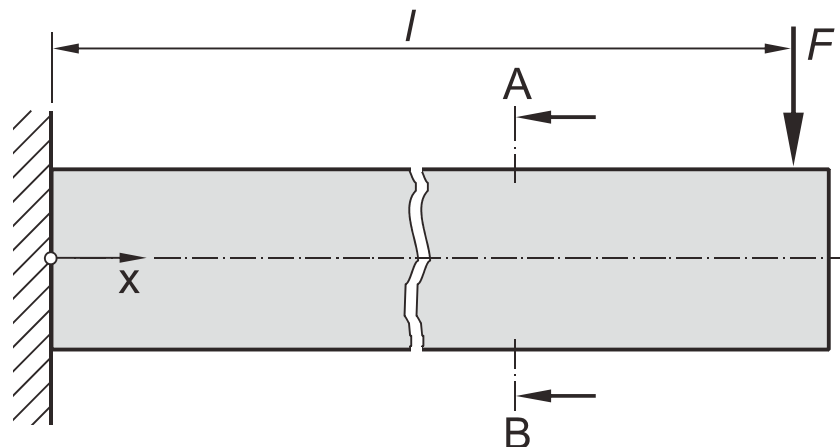
Werkstoffkennwerte S890QL:

$$R_e = 890 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Abmessungen:

$$l = 5000 \text{ mm}$$

$$h = 300 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$s = 20 \text{ mm}$$

Schiefe Biegung

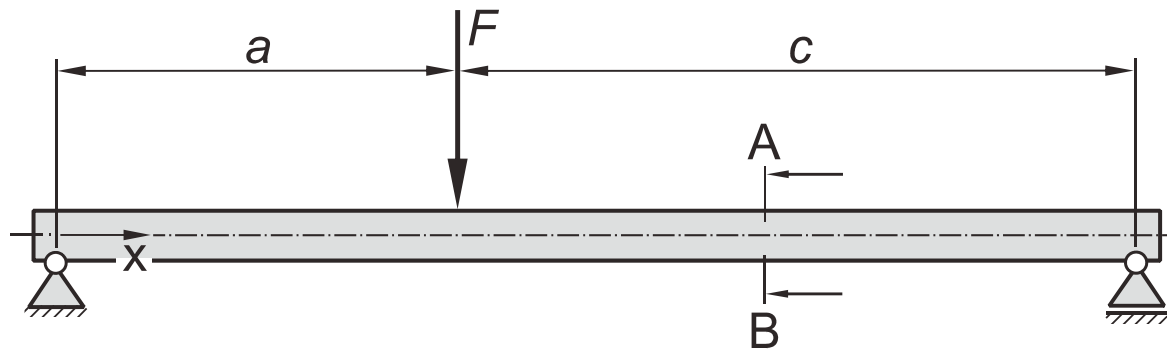
- a) Ermitteln Sie die Lage der beiden Hauptachsen für die gegebene Querschnittsfläche.
- b) Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- c) Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Biegespannung.
- d) Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Schiefe Biegung

Aufgabe 9.2



Der abgebildete Träger aus einem warm gewalzten Flachstahl mit Rechteckquerschnitt (Flachstab EN 10058 - 100x60x4000 F - S235JR) wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 22^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Querkraft $F = 10$ kN auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht dabei durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.



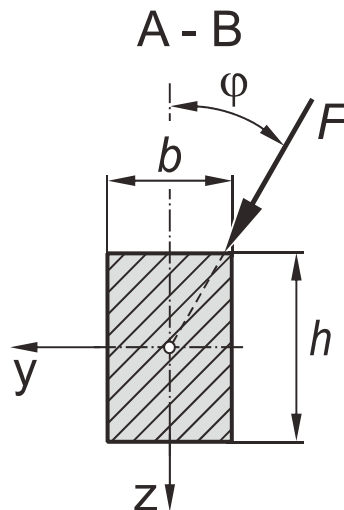
Abmessungen:

$$a = 1500 \text{ mm}$$

$$c = 2500 \text{ mm}$$

$$b = 60 \text{ mm}$$

$$h = 100 \text{ mm}$$



Schiefe Biegung

Schubspannungen durch Querkräfte sowie das Eigengewicht des Trägers sind zu vernachlässigen.

Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_e = 245 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 440 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Ermitteln Sie Ort und Betrag des maximalen Biegemomentes.
- Bestimmen Sie die Lage der beiden Hauptachsen des Rechteckquerschnitts.
- Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Biegespannung.
- Berechnen Sie für die höchst beanspruchte Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Schiefe Biegung

Aufgabe 9.3



Ein einseitig eingespannter, gleichschenkliger, scharfkantiger T-Profilstahl nach DIN 59051 (TPS 40) aus S355JR mit einer Länge von $l = 2 \text{ m}$ wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 20^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Kraft $F = 250 \text{ N}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Flächenschwerpunkt. Schubspannungen durch Querkkräfte, das Eigengewicht des Bauteils sowie Kerbwirkung am Einspannquerschnitt sind zu vernachlässigen.

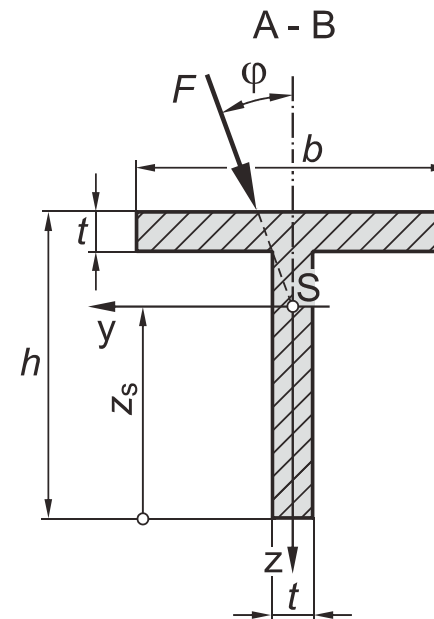
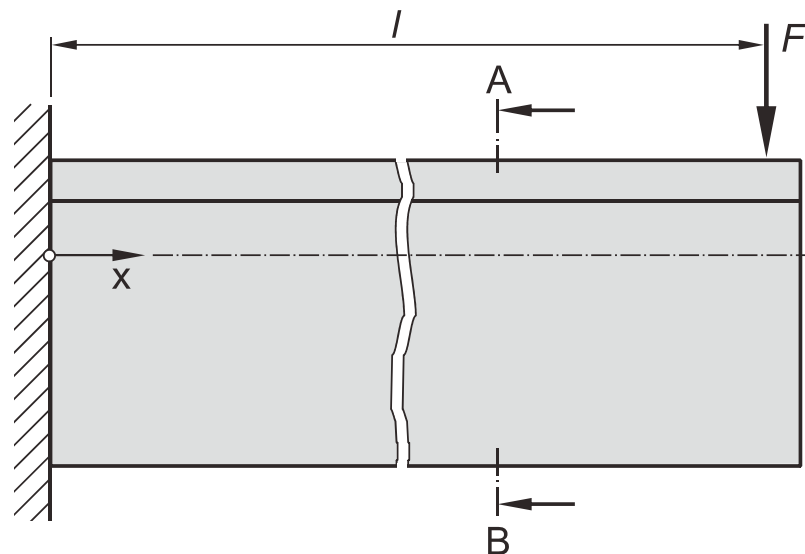
Werkstoffkennwerte S355JR:

$$R_e = 360 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 610 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 207000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Abmessungen:

$$l = 2000 \text{ mm}$$

$$b = 40 \text{ mm}$$

$$h = 40 \text{ mm}$$

$$t = 5 \text{ mm}$$

Schiefe Biegung

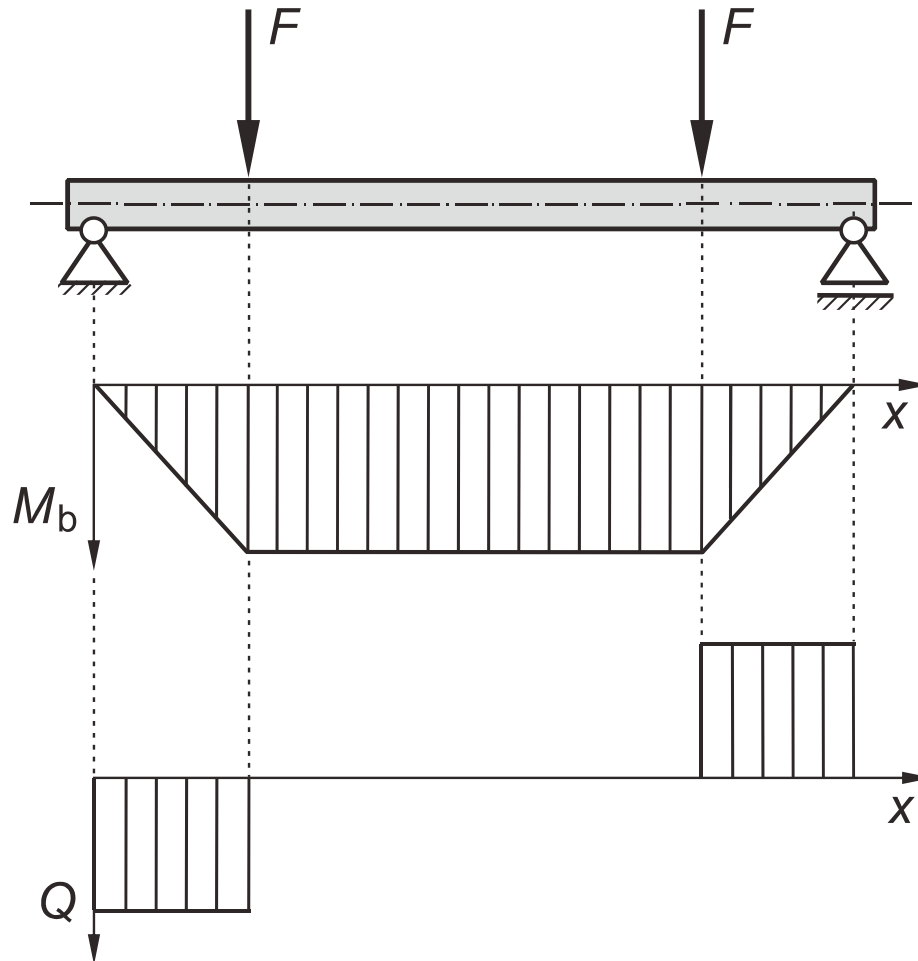
- a) Ermitteln Sie die Lage des Flächenschwerpunktes (z_s) sowie die Lage der beiden Hauptachsen für die gegebene Querschnittsfläche.
- b) Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- c) Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Zugspannung sowie der maximalen Druckspannung.
- d) Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Kapitel 10

Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung (Querkraftschub)

Querkraftschub

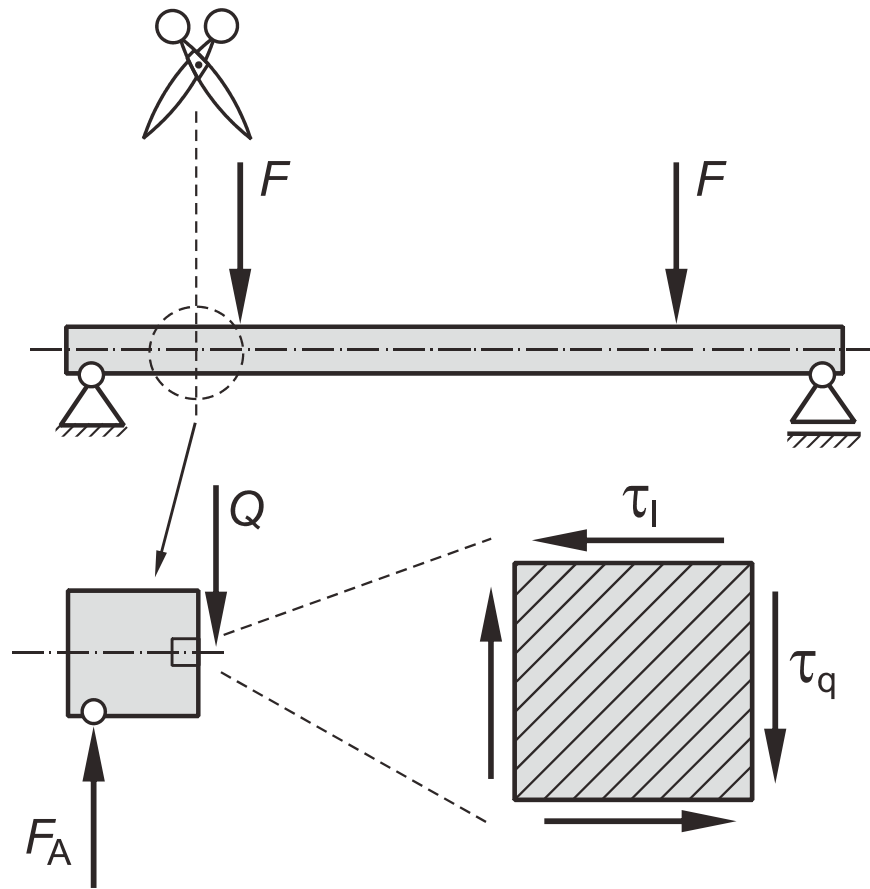
Entstehung von Schubspannungen durch Querkräfte



Wird ein Balken durch ein *veränderliches* Biegemoment beansprucht, dann treten in jeder Querschnittsfläche des Balkens Querkräfte (\$Q\$) auf.

$$\text{Es gilt: } Q(x) = \frac{dM_b}{dx}$$

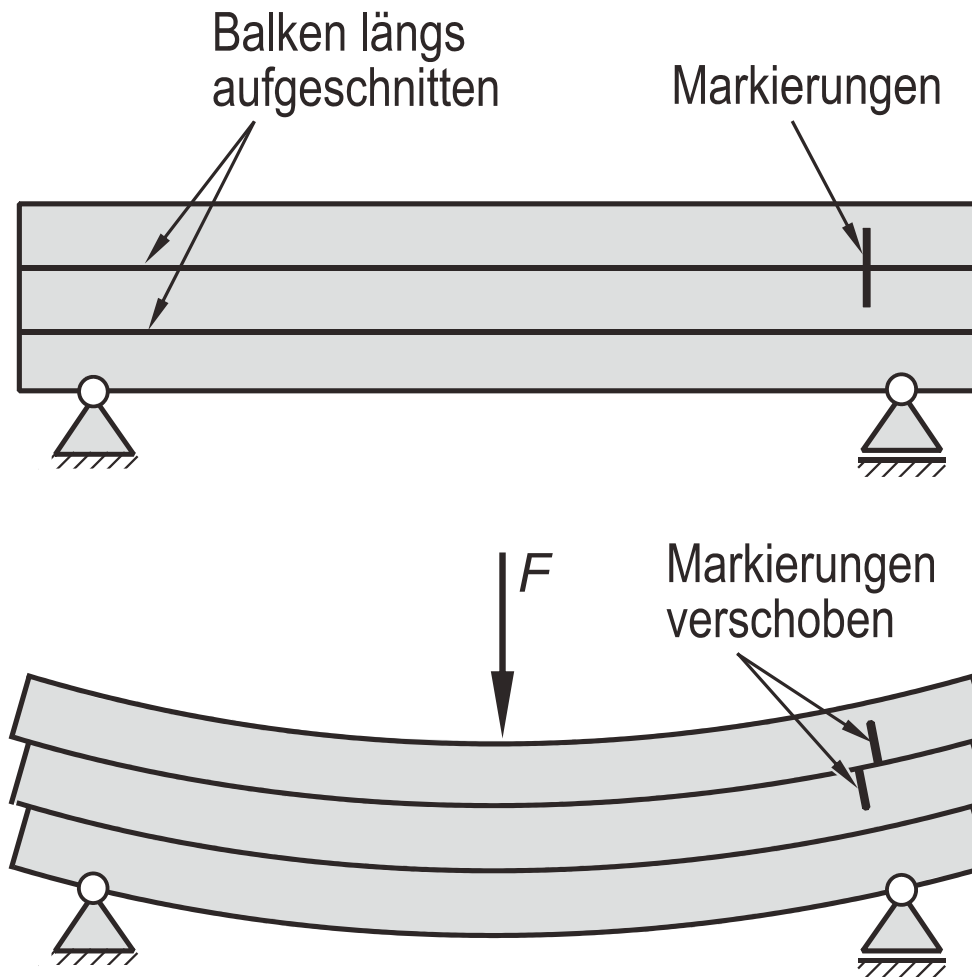
Querkraftschub



Querkräfte erzeugen Schubspannungen τ_q (**Querkraftschub**).

Schubspannungen treten immer paarweise auf (zugeordnete Schubspannungen, Folie 2-28), daher ergeben sich Schubspannungen sowohl in Querrichtung (τ_q) als auch und in Längsrichtung (τ_l).

Querkraftschub



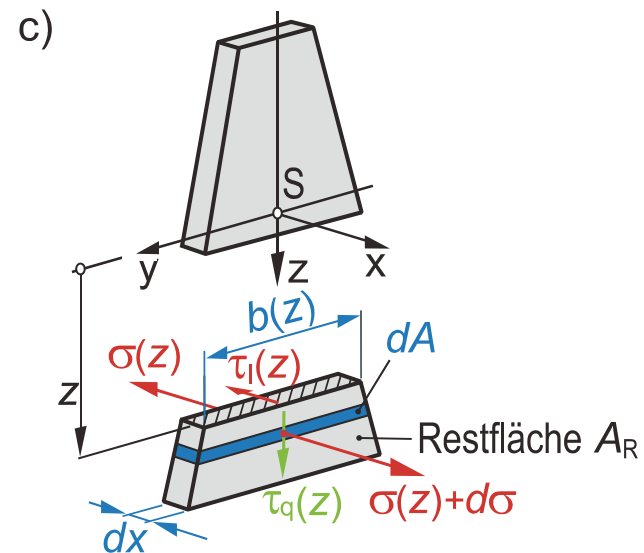
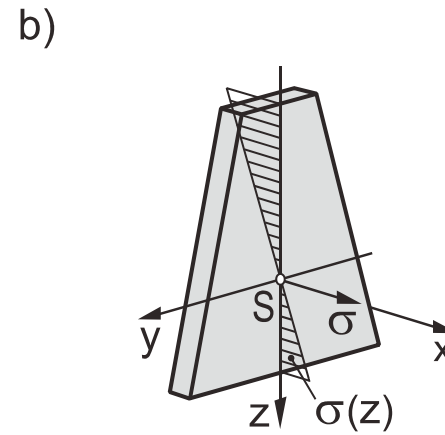
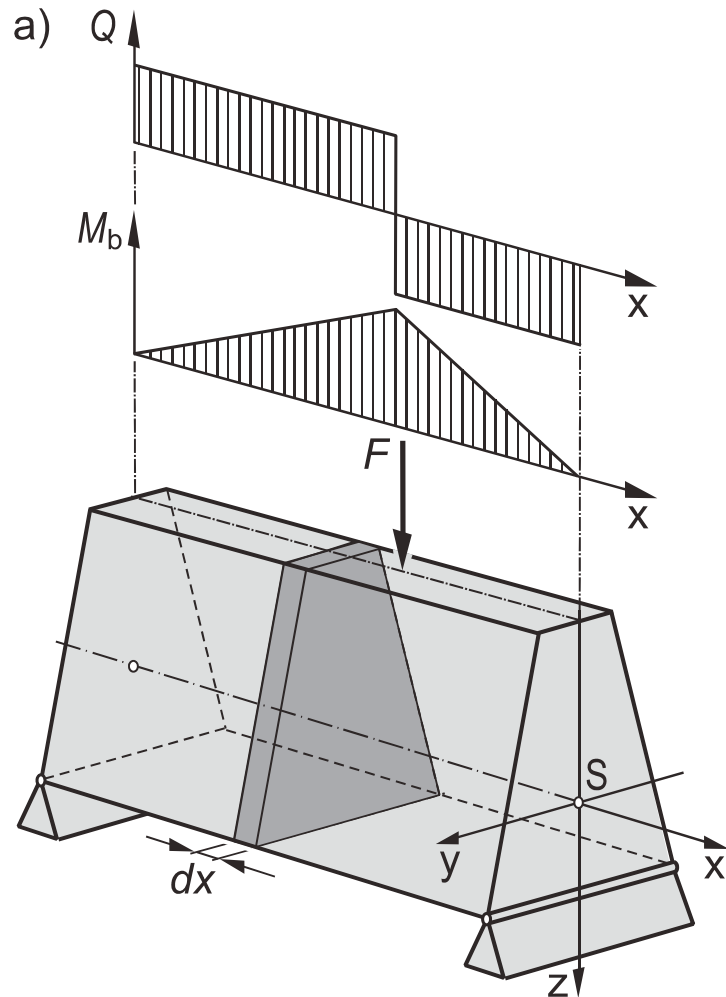
Das Auftreten von Schubspannungen in Längsrichtung (τ_l) kann man sich auch veranschaulichen, indem man den Balken aus lose aufeinander gelegten Brettern aufgebaut denkt.

Eine vorher aufgebrachte Markierung wird unter Biegung verschoben. Dieses Abgleiten wird beim massiven Balken durch die Längsschubspannungen τ verhindert.

Querkraftschub

Spannungsermittlung bei Querkraftschub

Berechnungsformel



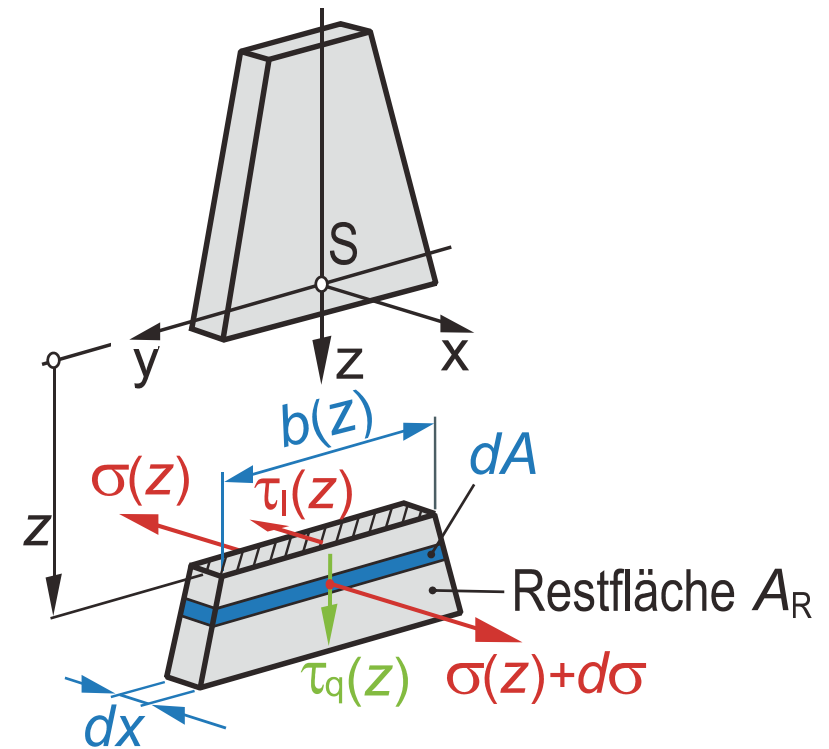
Querkraftschub

Zur Ermittlung der Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung schneidet man am biegebeanspruchten Balken ein schmales Volumenelement der Länge dx heraus und von diesem wiederum ein Teilelement ab.

Kräftegleichgewicht am Teilelement ergibt:

$$\int_{A_R} (\sigma(z) + d\sigma) \cdot dA - \int_{A_R} \sigma(z) \cdot dA - \tau_l(z) \cdot b(z) \cdot dx = 0$$

Die Differenz der Normalkräfte in der linken und der rechten Schnittfläche kann nur durch eine Tangentialkraft in Längsrichtung ($F_t = \tau_l(z) \cdot b(z) \cdot dx$) ausgeglichen werden.

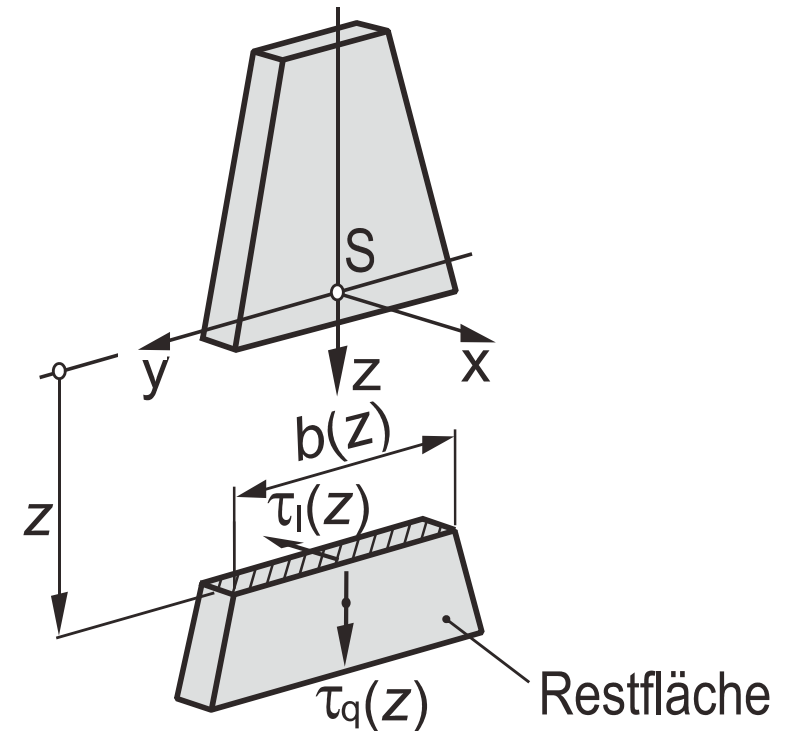


Querkraftschub

Aus dem Kräftegleichgewicht am Teilelement folgt die Grundgleichung zur Ermittlung der Längsschubspannung durch Querkräfte bei Biegung

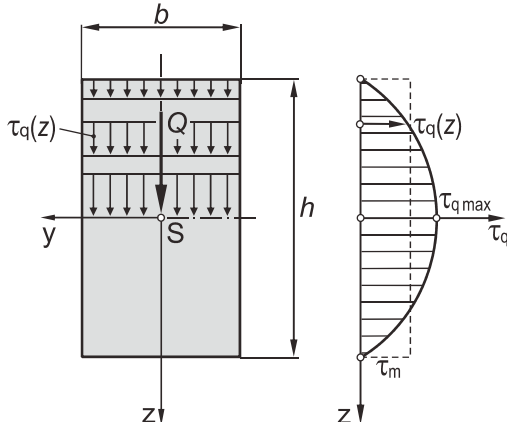
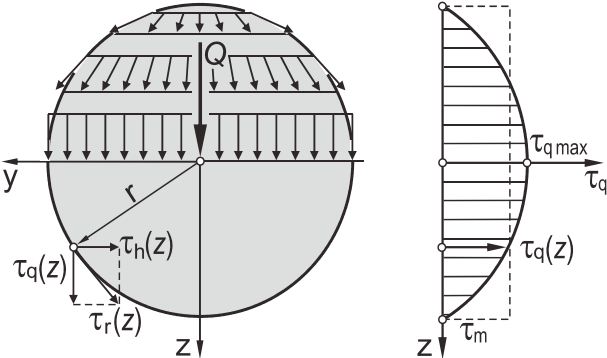
$$\tau_l(z) = \tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

- Q Querkraft (an der betrachteten Stelle)
- $H_y(z)$ Flächenmoment 1. Ordnung der Restfläche bezüglich der y -Achse durch den Flächenschwerpunkt S . $H_y(z)$ ist mit der Koordinate z veränderlich
- $b(z)$ Breite des Teilelements an der Stelle z .
- I_y Axiales Flächenmoment 2. Ordnung der *gesamten* Querschnittsfläche bzgl. der y -Achse durch den Flächenschwerpunkt.



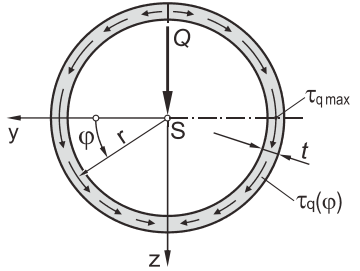
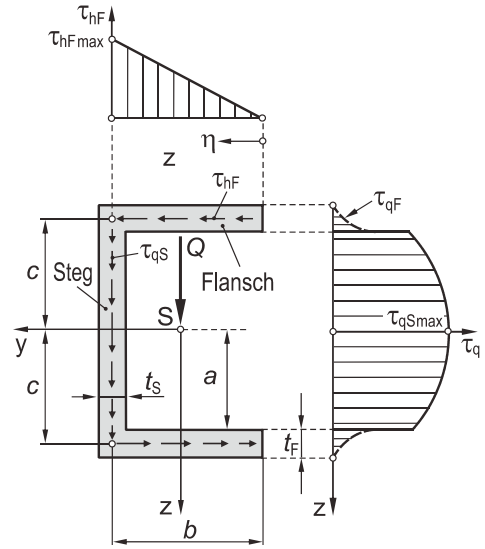
Querkraftschub

Schubspannungsverteilung ausgewählter Querschnittsflächen

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
Rechteckquerschnitt 	$\tau_q(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$	$\tau_{q \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
Vollkreisquerschnitt 	Vertikalkomponente: $\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right)$ Resultierende Randschubspannung: $\tau_r(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}$	$\tau_{q \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$

Querkraftschub

Fortsetzung Tabelle von Folie 10-8

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
Kreisring (dünnwandig) 	$\tau_{hF \max} = \frac{Q \cdot b}{I_y} \cdot \eta$	$\tau_{\max} = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} = 2 \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
C-Profil 	<p>Horizontale Schubspannungen im Flansch ($0 \leq \eta \leq b/2$)</p> $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta$ <p>Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$)</p> $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$	$\tau_{hF \max} = \frac{Q \cdot b}{I_y} \cdot \eta$

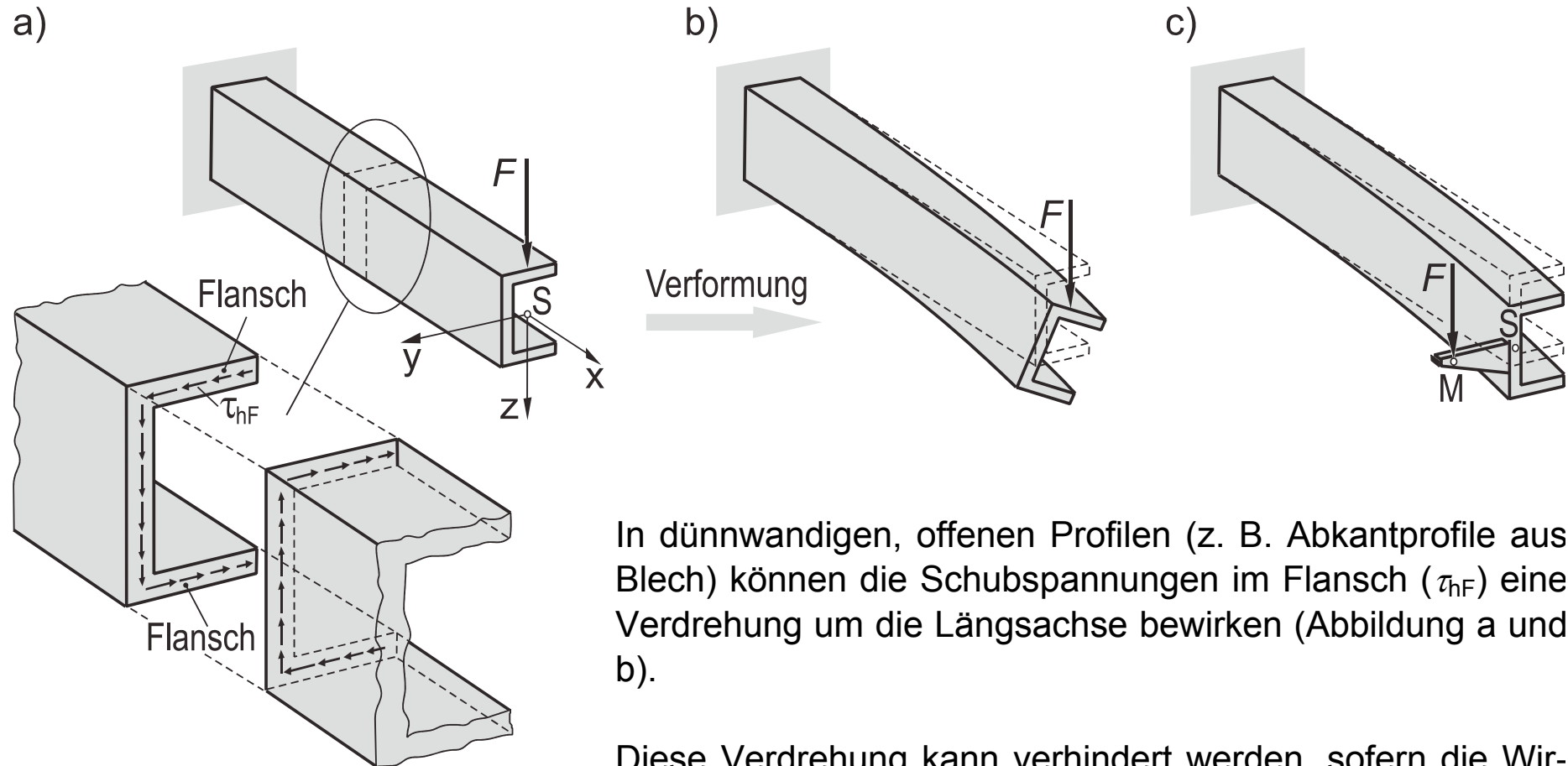
Querkraftschub

Fortsetzung Tabelle von Folie 10-9

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
I-Profil 	<p>Horizontale Schubspannungen im Flansch ($0 \leq \eta \leq b/2$)</p> $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$ <p>Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$)</p> $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$	$\tau_{hFmax} = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \frac{b}{2}$

Querkraftschub

Schubmittelpunkt



In dünnwandigen, offenen Profilen (z. B. Abkantprofile aus Blech) können die Schubspannungen im Flansch (τ_{hF}) eine Verdrehung um die Längsachse bewirken (Abbildung a und b).

Diese Verdrehung kann verhindert werden, sofern die Wirkungslinie der Kraft F durch den **Schubmittelpunkt** M geht und dadurch ein den Flansch-Schubkräften entgegengesetzt wirkendes Drehmoment erzeugt (Abbildung c).

The diagram illustrates the mechanical behavior of a reinforced concrete beam. The main part shows a cross-section of a beam with a central vertical crack. The top part is the concrete slab, and the bottom part is the reinforcement. A vertical force F is applied to the top slab. The beam is divided into three regions: a left region with a linear stress distribution, a middle region with a constant stress distribution, and a right region with a linear stress distribution. The stress distribution is shown as a triangle on the left and a rectangle in the middle. The reinforcement consists of a central vertical bar (Steg) and horizontal bars (Flansch). The width of the beam is b , and the thickness of the reinforcement is t . The reinforcement is labeled "Verstärkungsblech". The central vertical bar is labeled "Steg", and the horizontal bars are labeled "Flansch". The reinforcement is also labeled "Gurtniet". The stress distribution is labeled $\sigma(z)$ and $\tau_q(z)$. The moment is labeled M_b . The diagram also shows a detail of the reinforcement at the top of the beam, with labels $\sigma(z) + d\sigma$, $\tau_q(z)$, $\tau_l(z)$, t , b , $\sigma(z)$, A , and A_R .

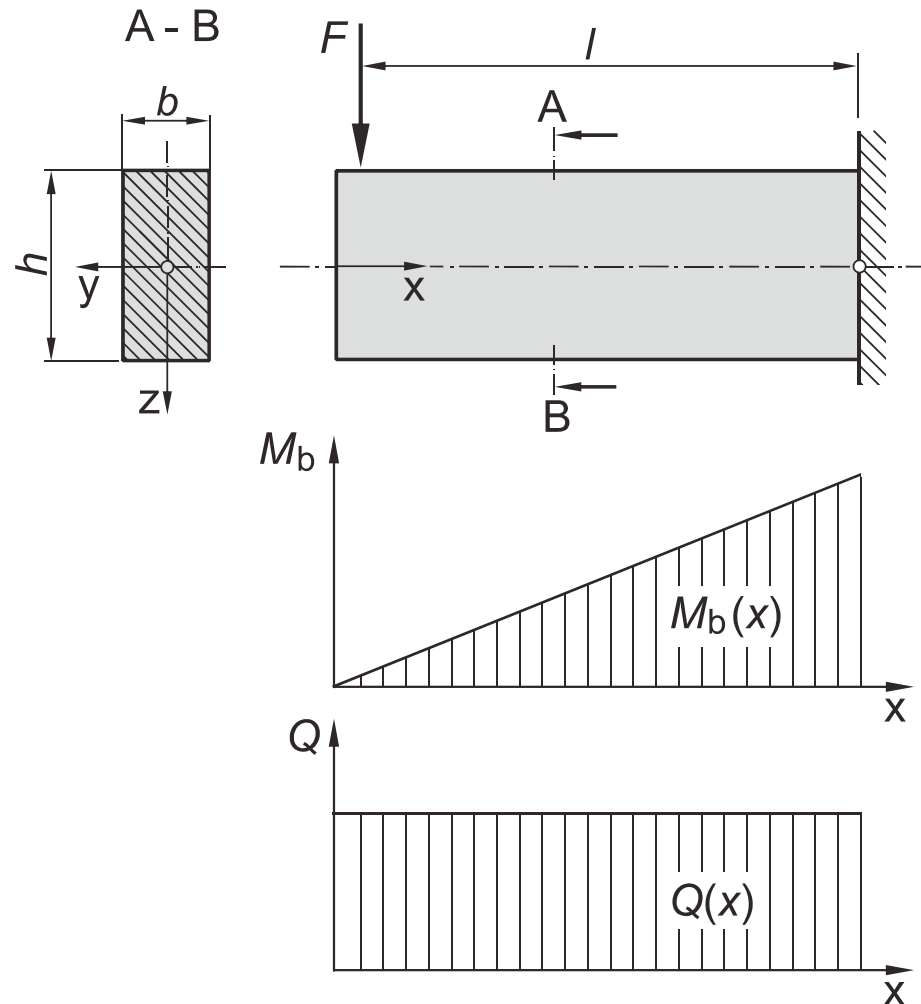
$$F_t = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y} \cdot A$$

Querkraftschub

Diese Tangentialkräfte F_t müssen von den Verbindungsmitteln wie Nieten oder Bolzen aber auch von Schweißnähten oder Klebstoffschichten aufgenommen werden. Von Bedeutung sind diese Längsschubkräfte aber auch bei Holzkonstruktionen, da die erzeugten Schubkräfte von Nägeln oder Leimschichten übertragen werden müssen.

Querkraftschub

Schub- und Normalspannungen bei biegebeanspruchten Balken



Bei **langen Balken** können die Schubspannungen gegenüber den Normalspannungen vernachlässigt werden. So beträgt beispielsweise für einen einseitig eingespannten Balken mit Rechteckquerschnitt und $l = 5 \cdot h$ die Schubspannung $\tau_{q \max}$ nur 5% der (Biege-) Normalspannung $\sigma_{b \max}$ und ist damit vernachlässigbar.

Falls Balkenhöhe und Balkenlänge jedoch dieselbe Größenordnung haben (**kurzer Balken**), so haben auch die Schub- und die Normalspannungen dieselbe Größenordnung. In diesem Fall darf bei einer Festigkeitsberechnung der Einfluss der Schubspannungen nicht mehr vernachlässigt werden.

Querkraftschub

Aufgabe 10.4

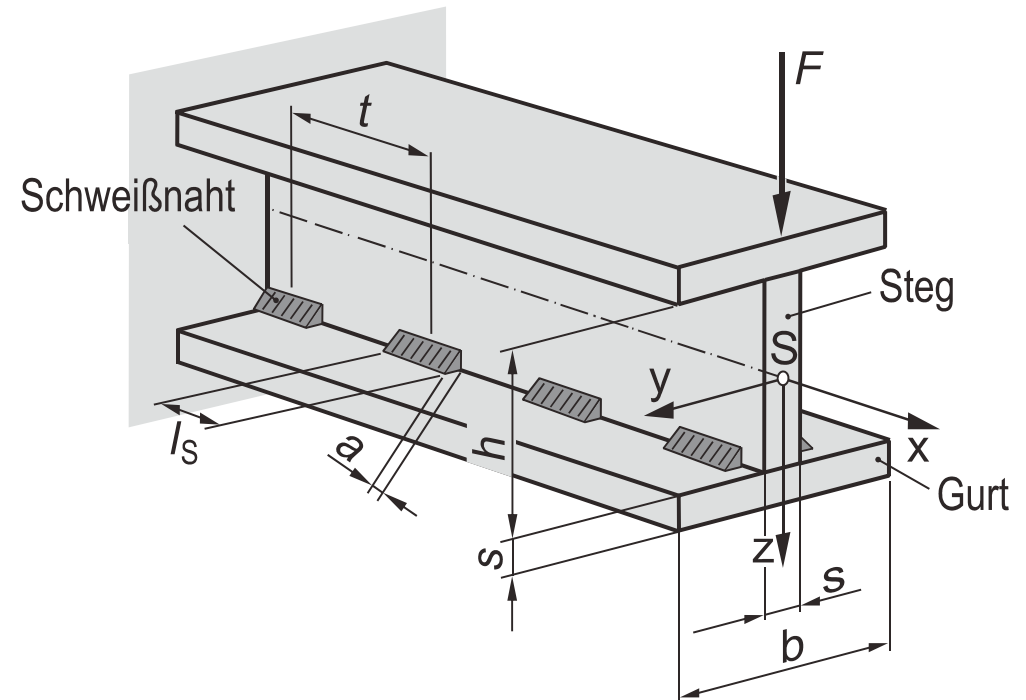


Der dargestellte kurze Freiträger ist aus drei gleichen Stahlblechen ($h = b = 300$ mm, $s = 30$ mm) zusammengeschweißt. Die Nahtdicke beträgt $a = 7$ mm, die Nahtlängen jeweils $l_s = 30$ mm und die Teilung $t = 50$ mm. Der Träger ist an seinem linken Ende fest eingespannt und an seinem rechten Ende durch die Kraft $F = 100$ kN belastet.

- a) Berechnen Sie die Schubspannung τ_s in der Schweißnaht.

Normalspannungen in der Schweißnaht aufgrund der Biegebeanspruchung sowie Kerbwirkung an der Einspannstelle sollen vernachlässigt werden.

- b) Ist die Beanspruchung der Schweißnaht noch zulässig, falls die Schubspannung in der Naht $\tau_{zul} = 85$ N/mm² nicht überschreiten darf?



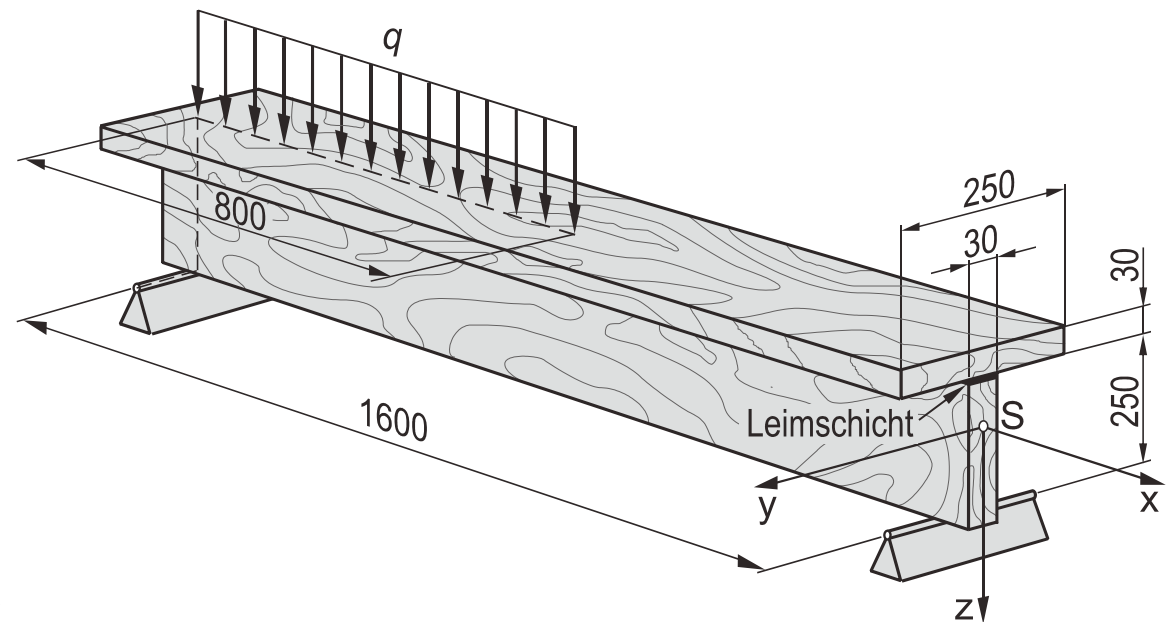
Querkraftschub

Aufgabe 10.7



Für eine einfache Dachkonstruktion sollen zwei Bretter (250 x 30 mm) T-förmig miteinander verleimt werden. Die hieraus entstehenden T-Profile werden auf ihrer linken Hälfte durch die Streckenlast $q = 100 \text{ kN/m}$ belastet.

- Ermitteln Sie die Lage des Flächenschwerpunktes des T-Profils.
- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment zweiter Ordnung bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt des T-Profils.
- Überprüfen Sie, ob die Belastung zulässig ist, falls die Schubspannung in der Leimschicht $\tau = 25 \text{ N/mm}^2$ nicht überschreiten darf.



Kapitel 11

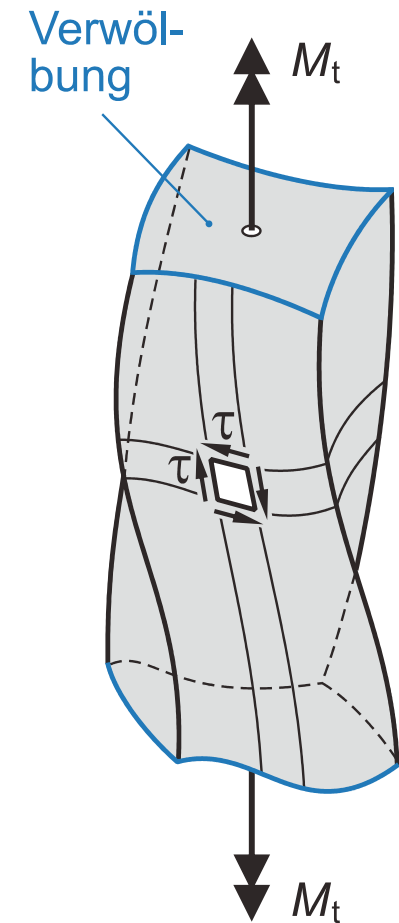
Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Reine Torsion oder Saint-Venantsche Torsion

Werden Stäbe mit **nicht kreisförmigen Querschnitten** (z. B. Rechteckquerschnitte) auf Torsion beansprucht, dann beobachtet man eine **Verwölbung** d. h. die Querschnittsflächen bleiben nicht eben.

Nachfolgend soll vorausgesetzt werden, dass sich eine freie Verwölbung der Querschnitte einstellen kann und keine Querkräfte auftreten. Man spricht dann von **reiner Torsion** oder **Saint-Venantscher Torsion**.



Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

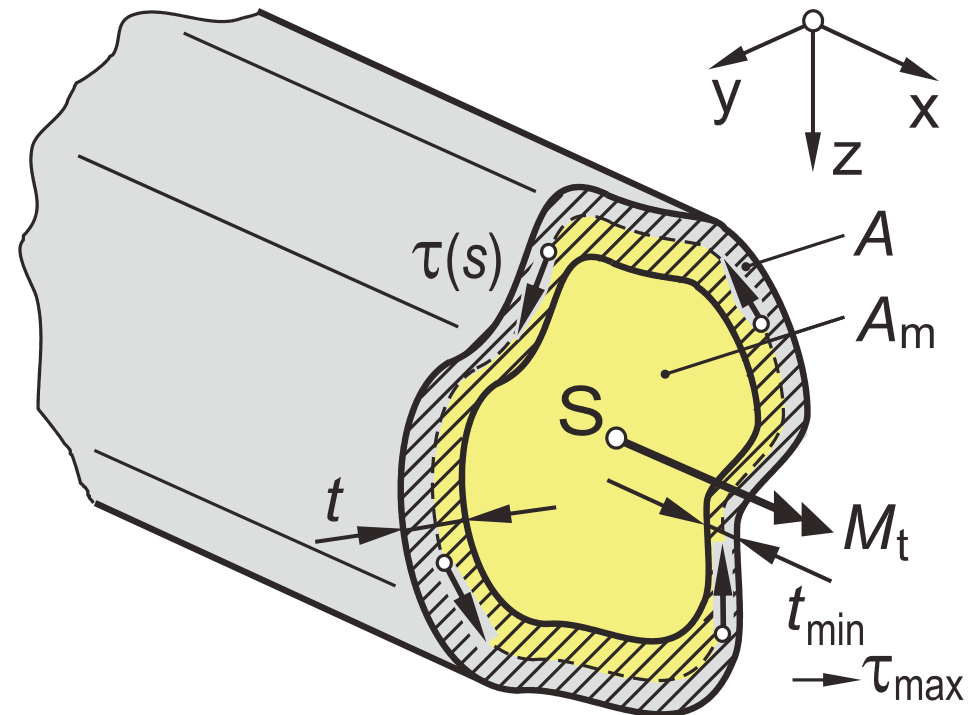
Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile

Annahmen:

- Belastung nur durch ein Drehmoment um die Stabachse.
- Keine Querkräfte.
- Freie Verwölbung der Querschnitte (also keine Normalspannungen in Längsrichtung).
- Wanddicke t klein gegenüber den Querschnittsabmessungen und nur wenig veränderlich.
- Gestalt der Querschnittsfläche bleibt bei der Verformung erhalten.

1. Bredtsche Formel ¹⁾

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}}$$



¹⁾ Rudolph Bredt, 1842 ... 1900

Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile

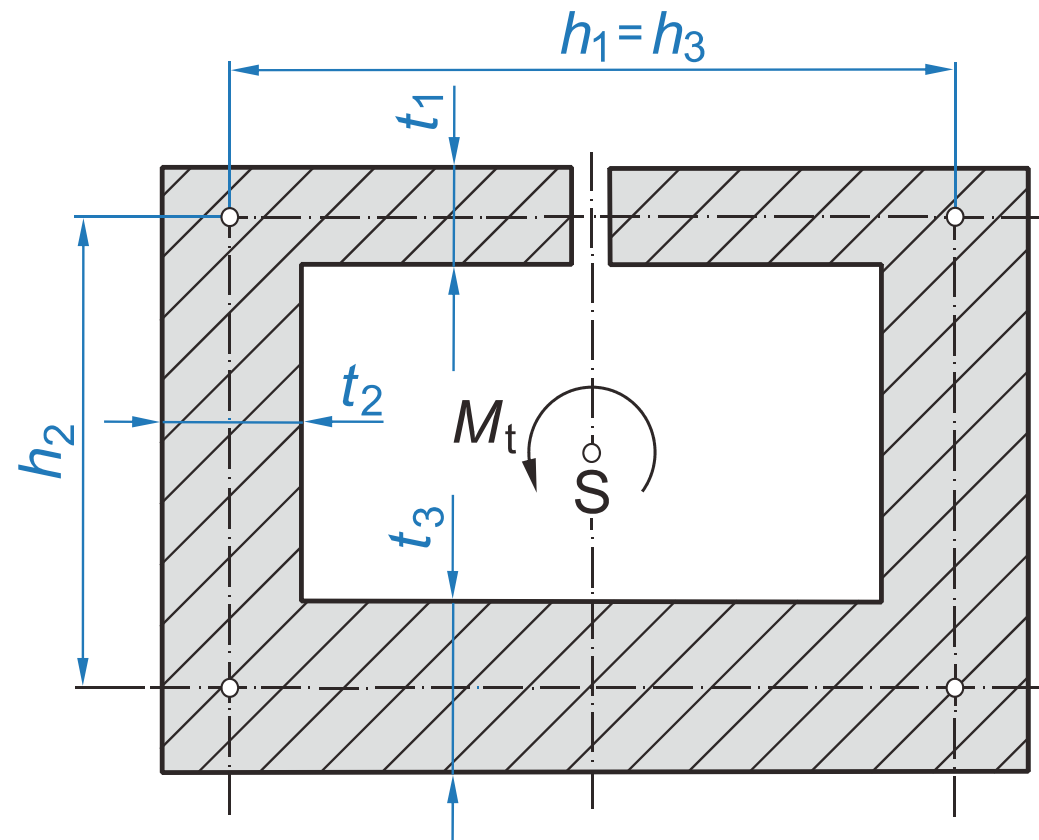
Beschränkung auf offene (einzellige) Hohlprofile, die sich aus schmalen Rechtecken zusammensetzen.

Torsionsflächenmoment (Drillwiderstand) eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$$

Torsionswiderstandsmoment

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$$



Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Maximale Schubspannung bei Torsion eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

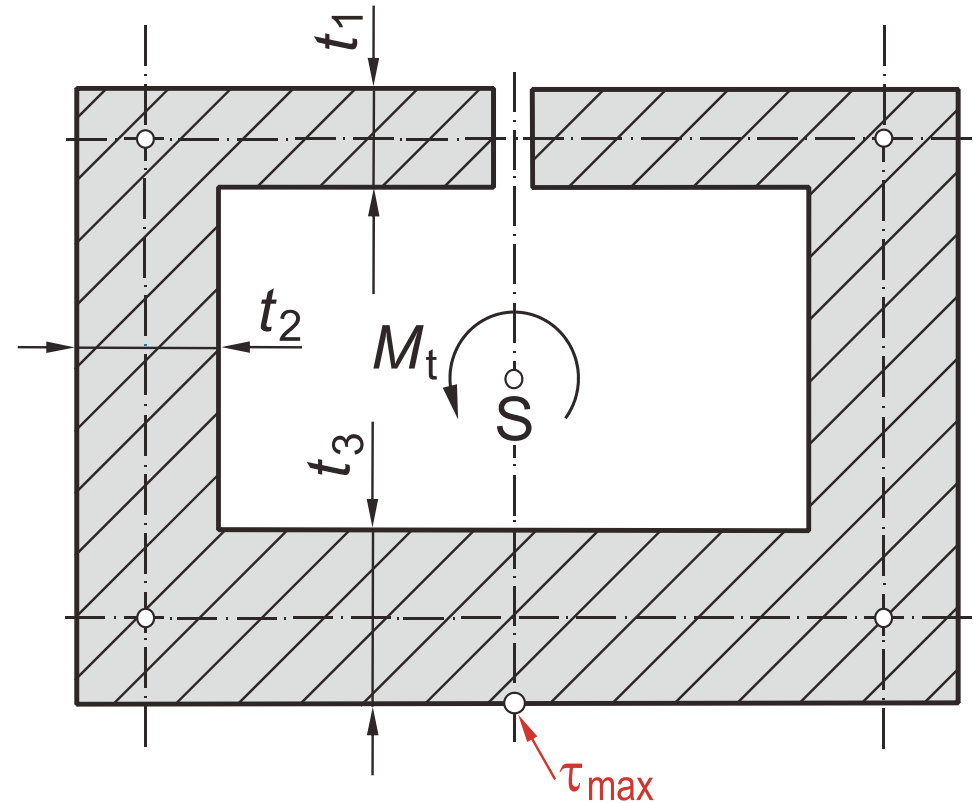
$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_t$$

Ort maximaler Schubspannung

Am Rechteck mit der größten Breite (t_{\max}) und dort am Außenrand in der Mitte der längeren Seite.

Anmerkung

Falls das Profil Querschnitte mit gekrümmter Mittellinie enthält, dann können diese Flächen näherungsweise wie gestreckte Rechtecke mit der Länge der abgewinkelten Mittellinie betrachtet werden (siehe Aufgabe 11.4).



Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

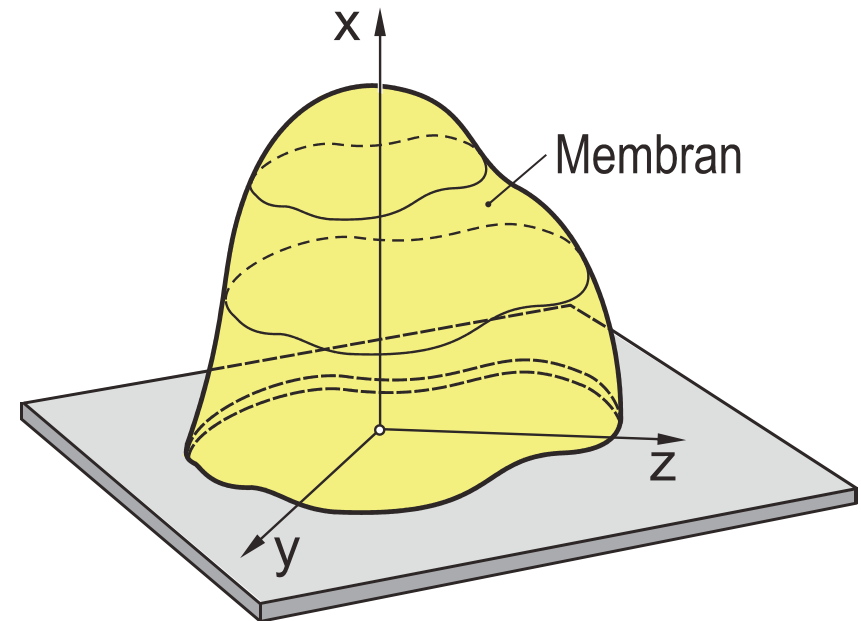
Torsion beliebiger Vollquerschnitte

Die für dünnwandige geschlossene und offene Profile abgeleiteten Beziehungen dürfen nicht auf beliebige nicht kreisförmige Vollquerschnitte übertragen werden.

Membran-Analogie von Prandtl

Zum qualitativen Auffinden der Orte größter Schubspannung bei nicht kreisförmigen Vollquerschnitten kann man sich u. a. der Membran-Analogie von Prandtl (*Ludwig Prandtl*, 1875 ... 1953) bedienen:

Man denkt sich zunächst den Vollkreisquerschnitt beispielsweise aus einer ebenen Blechplatte ausgeschnitten und mit einer Membran (z. B. Seifenhaut) überspannt. Bei einem geringen Überdruck wölbt sich diese Membran zu einer räumlich gekrümmten Fläche. Die höchste Schubspannung findet sich an der steilsten Stelle des „Seifenhautberges“.

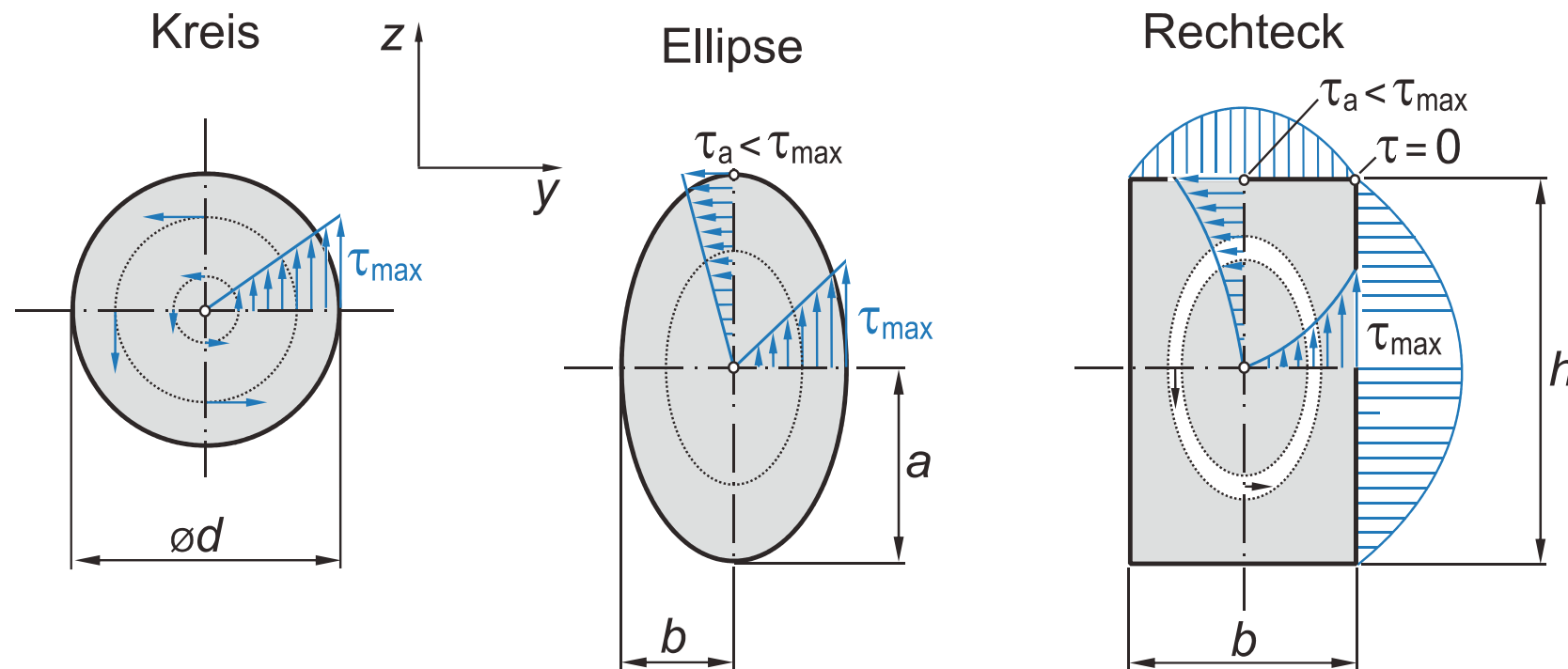


Der **Drillwiderstand** I_t ist proportional zum Volumen der verformten Membran. Ein zunehmender Drillwiderstand führt zu einer geringeren Verdrehung des Stabes.

Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Strömungsanalogie von Thomson¹⁾

Man denkt sich einen tordierten Stab von einer reibungsfreien, inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Zirkulation durchströmt. Dann stimmen Richtung der Stromlinien und Richtung der resultierenden Schubspannung überein und die Strömungsgeschwindigkeit (Abstand der Stromlinien) ist proportional zur Schubspannung.

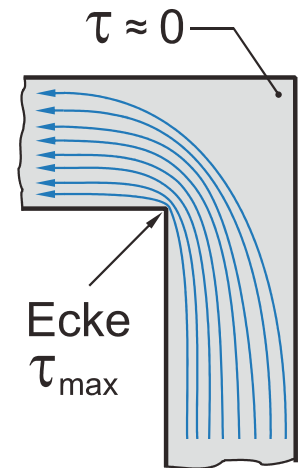
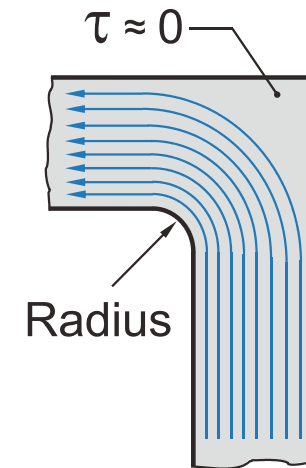


¹⁾ W. Thomson, 1824 ... 1907

Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Man erkennt insbesondere:

- An der Ecke eines tordierten Stabes ist die Schubspannung Null.
- Im Bereich scharfkantiger Ecken erfolgt eine „schroffe“ Umlenkung der Strömungsrichtung d. h. an diesen Stellen sind hohe Schubspannungen zu erwarten (Gefahr der Rissbildung bei spröden Werkstoffen).



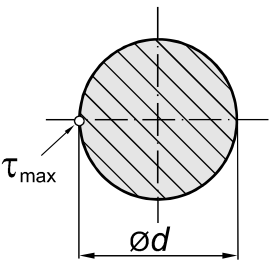
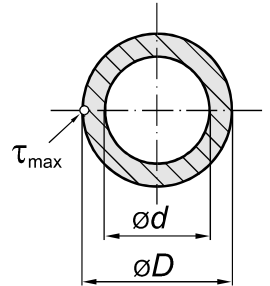
Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Grundgleichungen zur Torsion ausgewählter Querschnitte

Maximale Torsionsschubspannung in einem geraden prismatischen Stab mit beliebiger Querschnittsform

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t ausgewählter Querschnitte

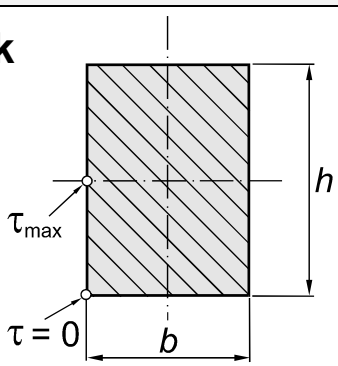
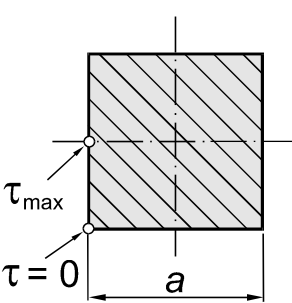
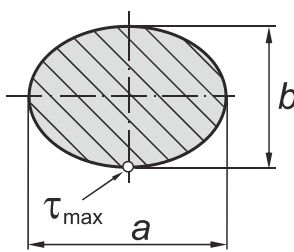
Profil	Torsionsflächenmoment	Torsionswiderstandsmoment
Vollkreis 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Kreisring ¹⁾ 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

¹⁾ dickwandig

Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Fortsetzung:

Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t ausgewählter Querschnitte

Profil	Torsionsflächenmoment	Torsionswiderstandsmoment
Rechteck 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ mit $c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{0,630}{h/b} + \frac{0,052}{(h/b)^5} \right)$ und $c_2 = 1 - \frac{0,650}{1 + (h/b)^3}$	$W_t = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2$
Quadrat 	$I_t = 0,141 \cdot a^4$	$W_t = 0,208 \cdot a^3$
Ellipse 	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot a \cdot b^2$

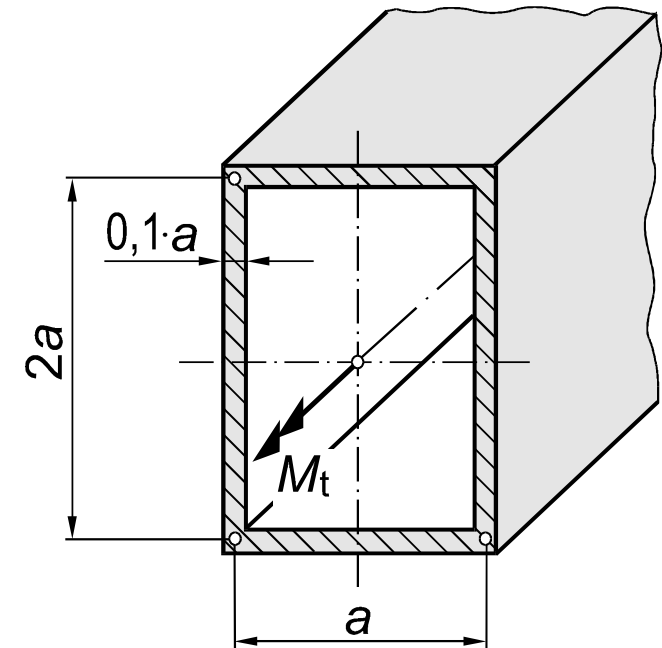
Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Aufgabe 11.1



Der dargestellte Kastenträger aus dem unlegierten Baustahl S235JR ($R_e = 240 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 440 \text{ N/mm}^2$) hat einen dünnwandigen Rechteckquerschnitt und wird durch das Torsionsmoment $M_t = 500 \text{ Nm}$ um die Stabachse statisch beansprucht.

Berechnen Sie das Maß a , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.



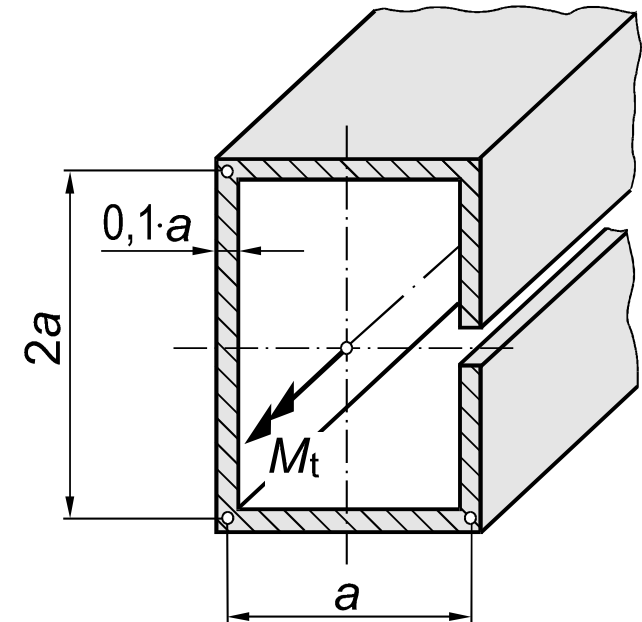
Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Aufgabe 11.2



Der dünnwandige Kastenträger aus Aufgabe 11.1 (Werkstoff S235JR; $R_e = 240 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 440 \text{ N/mm}^2$) erhält einen schmalen, durchgehenden seitlichen Schlitz (siehe Abbildung). Das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 500 \text{ Nm}$ um die Stabachse soll unverändert bleiben.

Berechnen Sie für diese Variante das Maß a , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.



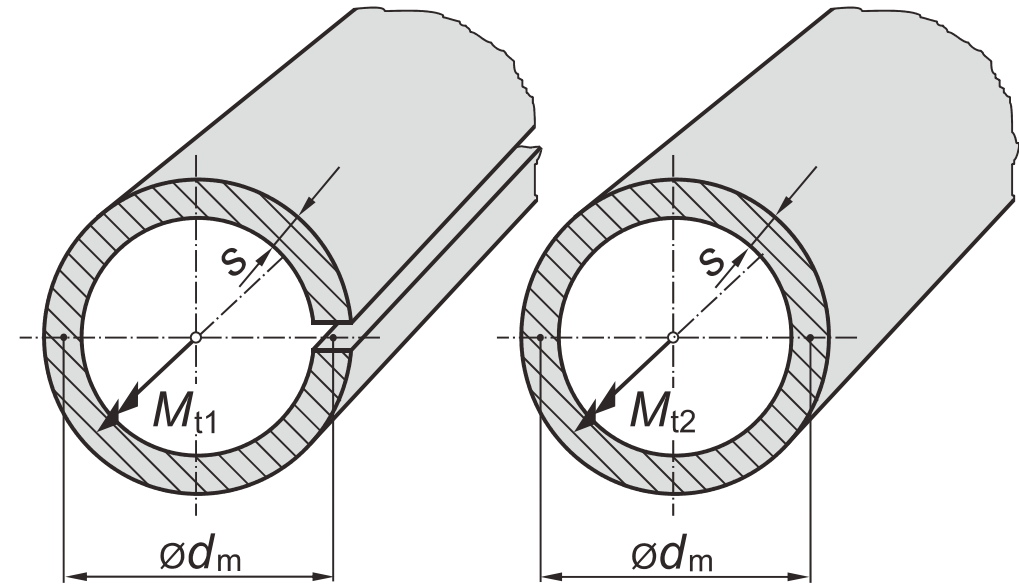
Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Aufgabe 11.4



Zwei dünnwandige Stahlrohre mit Kreisringquerschnitt (Werkstoff S355J0) werden durch die um die Stabachse wirkenden Momente M_{t1} und M_{t2} auf Torsion beansprucht (siehe Abbildung). Während eines der beiden Stahlrohre einen durchgehenden Schlitz hat, ist das andere Stahlrohr geschlossen.

Berechnen Sie das Verhältnis M_{t2} / M_{t1} der übertragbaren Torsionsmomente, so dass kein Fließen eintritt.



Kapitel 12

Behälter unter Innen- und Außendruck

Behälter unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige und dickwandige Behälter

Ein Behälter wird nach DIN 2413 als dünnwandig bezeichnet, falls für das Durchmesser-Verhältnis gilt:

$$\frac{d_a}{d_i} \leq 1,2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{s}{d_i} \leq 0,1$$

Behälter unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige Behälter unter Innendruck

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck:

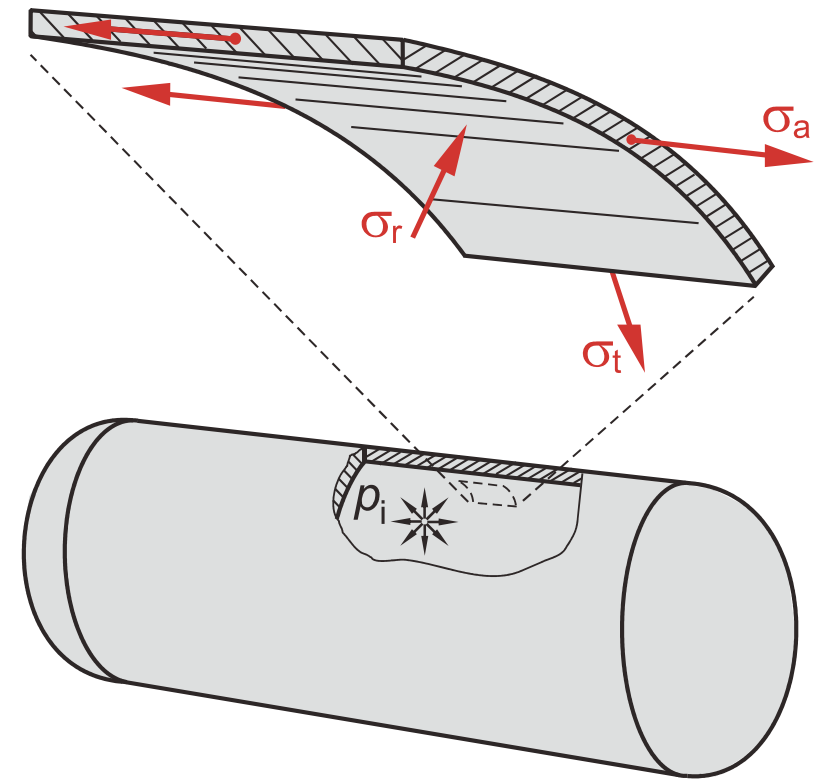
$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_t}{2}$$

Die Gleichungen werden in der Praxis auch als "**Kesselformeln**" bezeichnet.

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck (Mittelwert):

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2}$$

Da die Radialspannung sehr viel kleiner ist im Vergleich zur Tangential- oder Axialspannung, wird sie mitunter auch vernachlässigt und ein näherungsweise zweiachsiger Spannungszustand der Berechnung zugrunde gelegt.



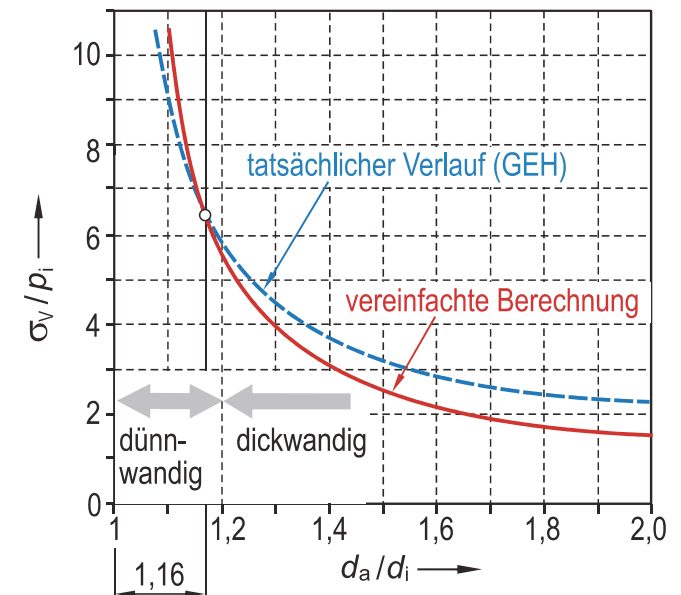
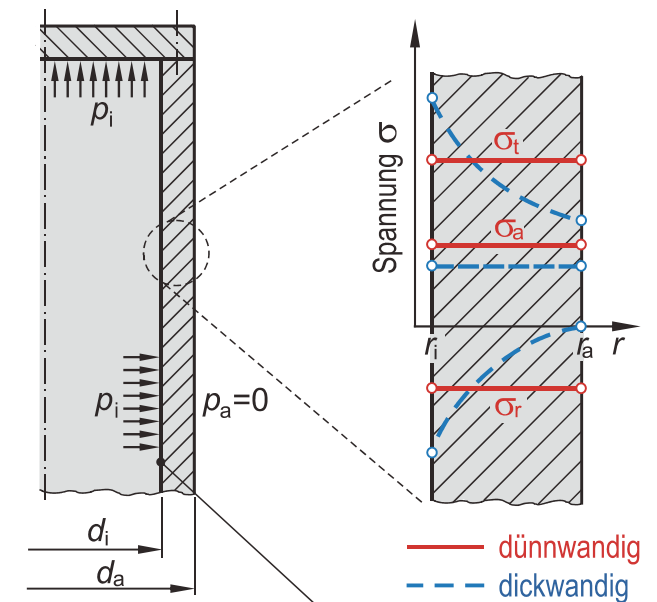
Hinweis: 1 bar = 0,1 N/mm² = 0,1 MPa

Behälter unter Innen- und Außendruck

Vergleichsspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck unter Anwendung der Schubspannungshypothese:

$$\sigma_{VSH} = p_i \cdot \frac{d_m}{2 \cdot s}$$

Vergleicht man die tatsächlichen und die vereinfacht berechneten Verläufe der Vergleichsspannung in der Wand eines Behälters unter Innendruck, dann erkennt man, dass bis zu einem Durchmesser Verhältnis von $d_a/d_i = 1,16$ die vereinfachte Berechnung konservative Ergebnisse liefert.



Spannungsverläufe in der Behälterwand unter Innendruck

Behälter unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige Behälter unter Außendruck

Werden dünnwandige Behälter durch einen äußeren Überdruck (p_a) beansprucht, dann erhält man in Analogie zum durch Innendruck beanspruchten Behälter für die Spannungskomponenten in der Behälterwand die nachfolgenden Gleichungen.

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck:

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{2 \cdot s}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck:

$$\sigma_a = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck (Mittelwert):

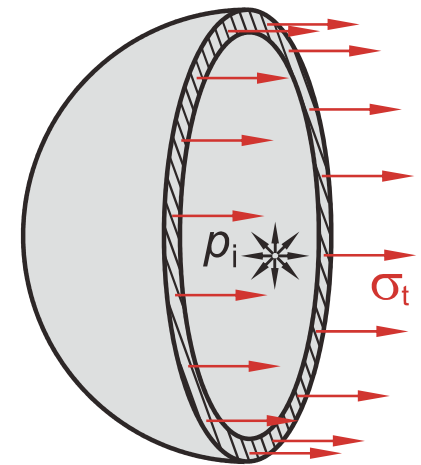
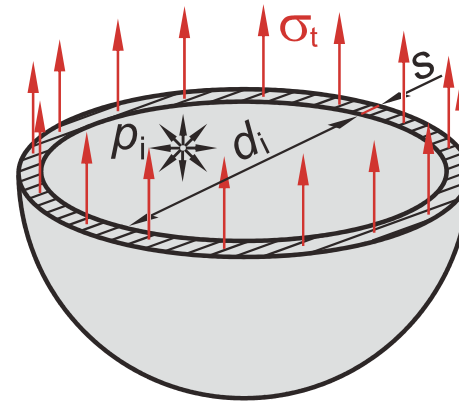
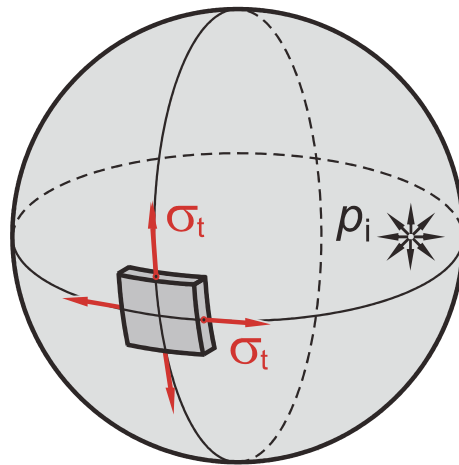
$$\sigma_r = -\frac{p_a}{2}$$

Behälter unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige Hohlkugel unter Innen- bzw. Außendruck

Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel **unter Innendruck** in einer Schnittebene, die den Kugelmittelpunkt enthält:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s}$$



Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter der Wirkung eines **äußeren Überdrucks** (Außendruck) in einer Schnittebene, die den Kugelmittelpunkt enthält:

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Aus Gründen der Kugelsymmetrie sind die beschriebenen Spannungsverhältnisse identisch, d. h. an jeder beliebigen Stelle der Kugelwand sind die Spannungen gleich groß.

Behälter unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige Behälter mit elliptischer Unrundheit

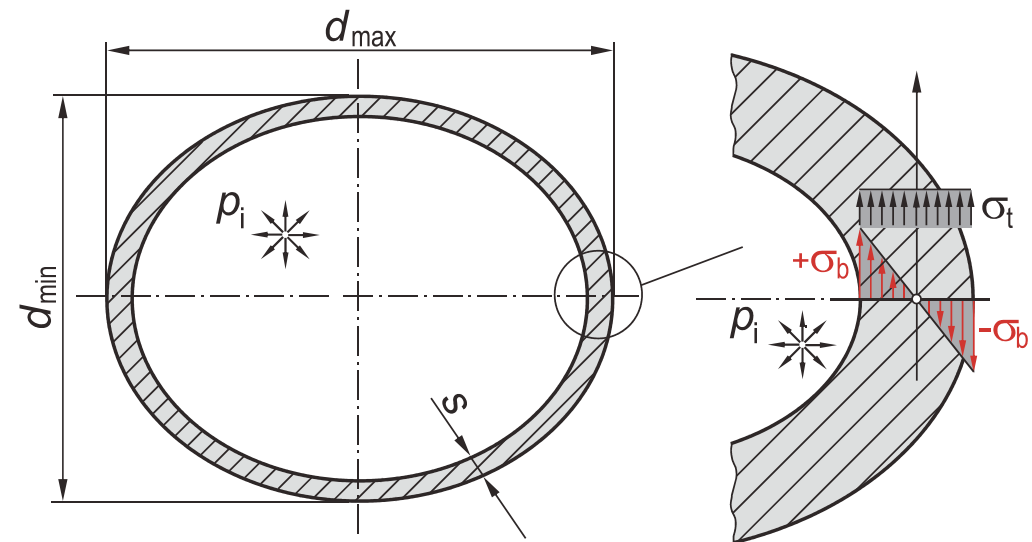
Hohlzylinder sind aus fertigungstechnischen Gründen in der Regel nicht exakt kreisförmig, sondern mehr oder weniger unrund. Hierbei entsteht eine **zusätzliche Biegespannung** σ_b in Umfangsrichtung in der Behälterwand, die sich der Tangentialspannung überlagert.

Biegespannung in der Wand eines un-runden, dünnwandigen Behälters:

$$\sigma_b = \pm \frac{3}{4} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^2 \cdot \kappa \cdot f$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{2 \cdot (d_{\max} - d_{\min})}{d_{\max} + d_{\min}}$$

$$\text{und } f = \frac{1}{1 + \frac{1 - \mu^2}{2 \cdot E} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^3}$$



Behälter unter Innen- und Außendruck

Dickwandige Behälter

Im Unterschied zum dünnwandigen Behälter muss bei den dickwandigen Behältern eine ungleichmäßige Spannungsverteilung über der Wanddicke berücksichtigt werden.

Voraussetzungen für die Anwendung der nachfolgenden Gleichungen sind:

- eine große Länge des Zylinders (keine Randeinflüsse),
- linear-elastisches ideal-plastisches Werkstoffverhalten,
- Vernachlässigung von Volumenkräften (Eigengewicht).

Zur Spannungsermittlung dickwandiger Behälter ist es sinnvoll, die folgenden Zustände getrennt zu betrachten:

- **Elastischer Zustand**
- **Teilplastischer Zustand**
- **Vollplastischer Zustand**

Behälter unter Innen- und Außendruck

Elastischer Zustand unter Innen- und Außendruck

Radialspannung unter Innen- und Außendruck (elastischer Zustand)

$$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right)$$

Tangentialspannung unter Innen- und Außendruck (elastischer Zustand)

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$$

Axialspannung unter Innen- und Außendruck (elastischer Zustand)

Ist der Hohlzylinder an beiden Enden verschlossen bzw. handelt es sich um eine abgewinkelte Rohrleitung, dann tritt zusätzlich zur Tangential- und Radialspannung noch eine über den Querschnitt konstante Axialspannung σ_a auf.

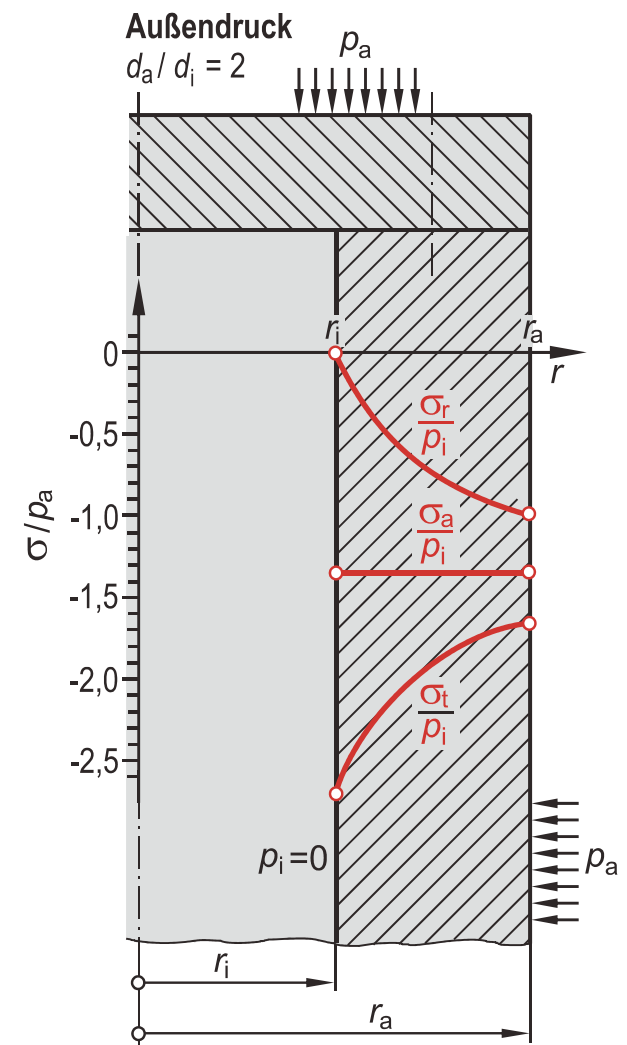
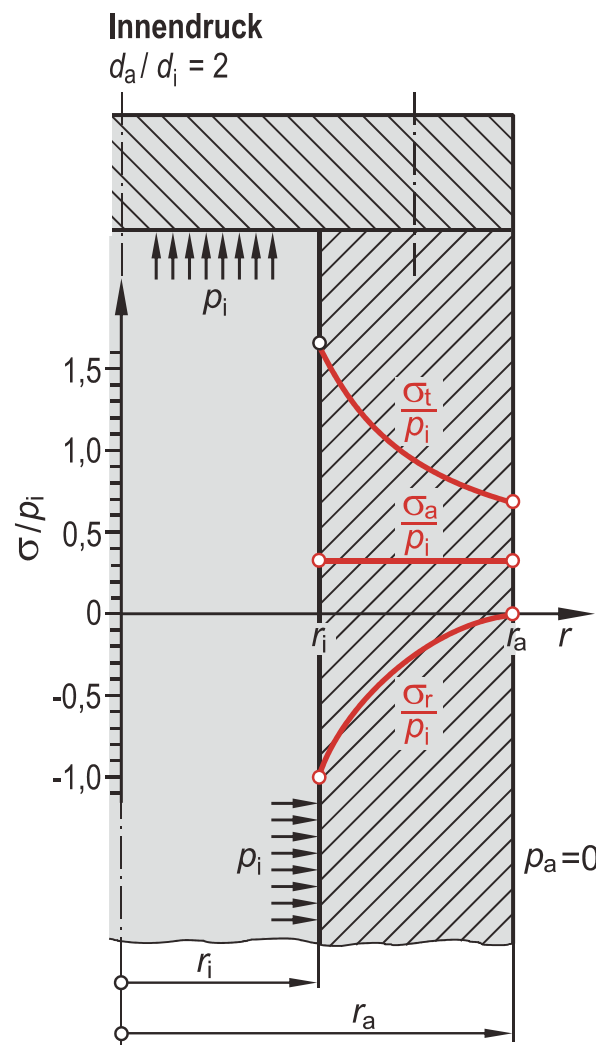
$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

Behälter unter Innen- und Außendruck

Die Gleichungen auf Folie 12-9 zeigen auch, dass die Spannungskomponenten σ_t , σ_r und σ_a in zylindrischen Behältern nicht von der absoluten Größe des Behälters sondern nur von seinem Durchmesser Verhältnis r_a / r_i abhängen. Es gilt daher die folgende Aussage:

Geometrisch ähnliche zylindrische Hohlzylinder, (also $r_a / r_i = \text{konstant}$) unter Innen- und/oder Außendruck sind bei gleicher Druckbelastung gleich hoch beansprucht.

Abhängigkeit der Radial-, Tangential- und Axialspannung vom Radius r eines **elastisch** beanspruchten, dickwandigen Behälters.



Behälter unter Innen- und Außendruck

Vergleichsspannungen

Mit Hilfe obiger Gleichungen können die Spannungskomponenten σ_t , σ_r und σ_a an einer beliebigen Stelle der Wand eines durch Innen- und/oder Außendruck beanspruchten Behälters berechnet werden. Da die Schnittflächen aus Gründen der Symmetrie von Form und Belastung keine Schubspannungen enthalten, sind die Lastspannungen σ_t , σ_r und σ_a gleichzeitig Hauptspannungen.

Für $p_i > p_a$ gilt entsprechend der Indizierungsregel für Hauptnormalspannungen

$$\sigma_t \equiv \sigma_1$$

$$\sigma_a \equiv \sigma_2$$

$$\sigma_r \equiv \sigma_3$$

Für $p_i < p_a$ folgt:

$$\sigma_r \equiv \sigma_1$$

$$\sigma_a \equiv \sigma_2$$

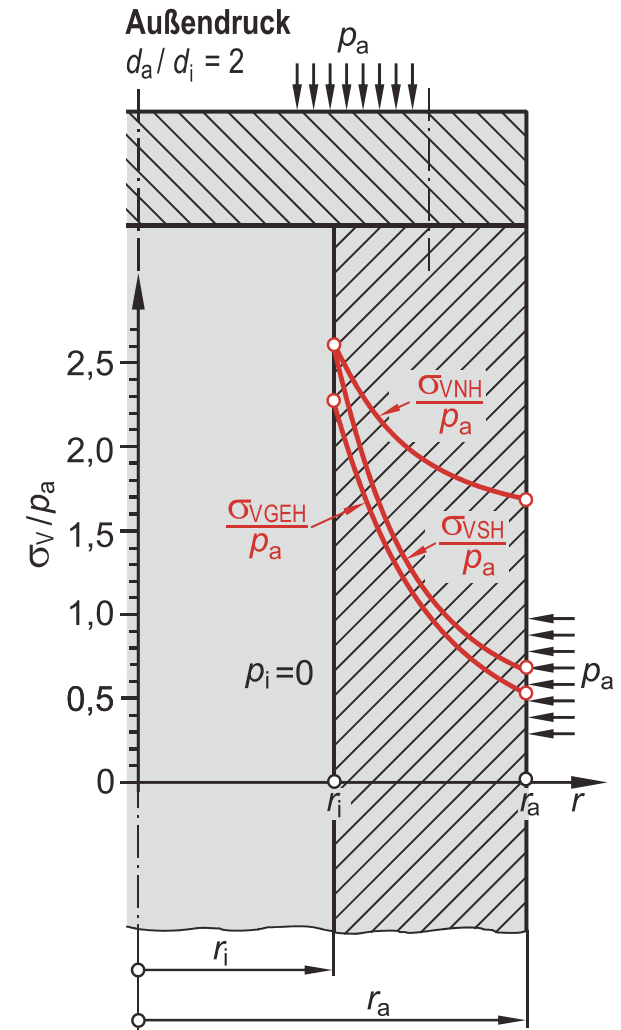
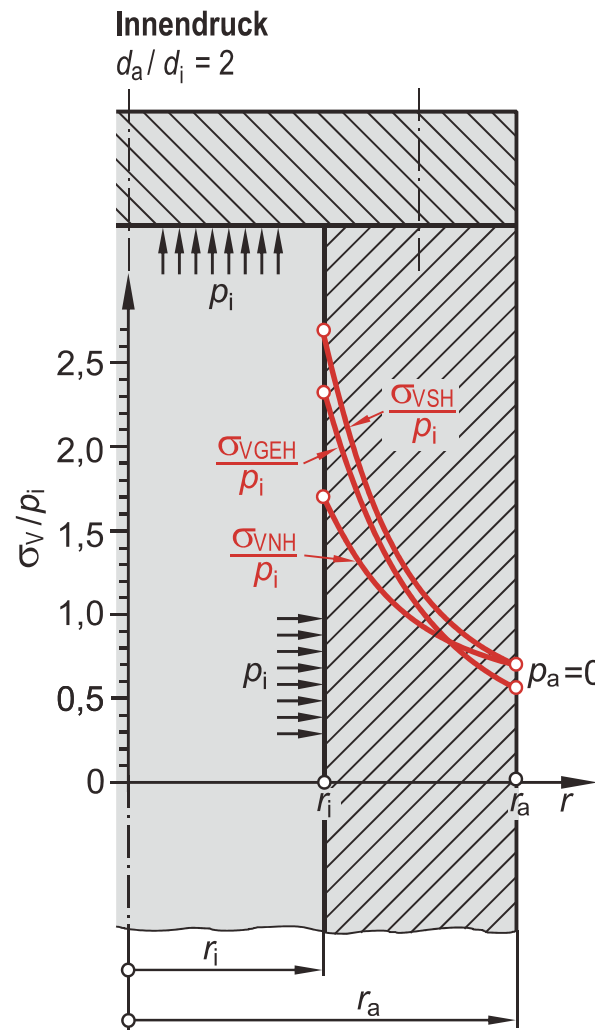
$$\sigma_t \equiv \sigma_3$$

Entsprechend dem Werkstoffzustand (duktil oder spröde) kann mit Hilfe einer geeigneten Festigkeitshypothese (NH, SH oder GEH) die Vergleichsspannung σ_v berechnet und damit ein Festigkeitsnachweis geführt werden.

Behälter unter Innen- und Außendruck

Abhängigkeit der Vergleichsspannungen σ_{VNH} , σ_{VSH} und σ_{VGEH} vom Radius r eines dickwandigen Behälters im elastischen Zustand.

Höchst beansprucht ist stets die Innenwand ($r = r_i$). Für den Festigkeitsnachweis eines dickwandigen zylindrischen Behälters ist also die Beanspruchung der Innenwand maßgebend.



Behälter unter Innen- und Außendruck

Fließbeginn unter Innendruck

$$p_{iFB} = R_e \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2}$$

Erreicht bzw. überschreitet der Innendruck den Wert p_{iFB} , dann beginnt der Behälter an der Innenwand zu fließen.

Für Festigkeitsnachweise druckbeanspruchter Behälter sollte der Sicherheitsbeiwert gegen Fließen (S_F) größer 1,5 gewählt werden.

¹⁾ Eine Beanspruchung durch Außendruck bzw. durch Innen- und Außendruck soll nicht betrachtet werden.

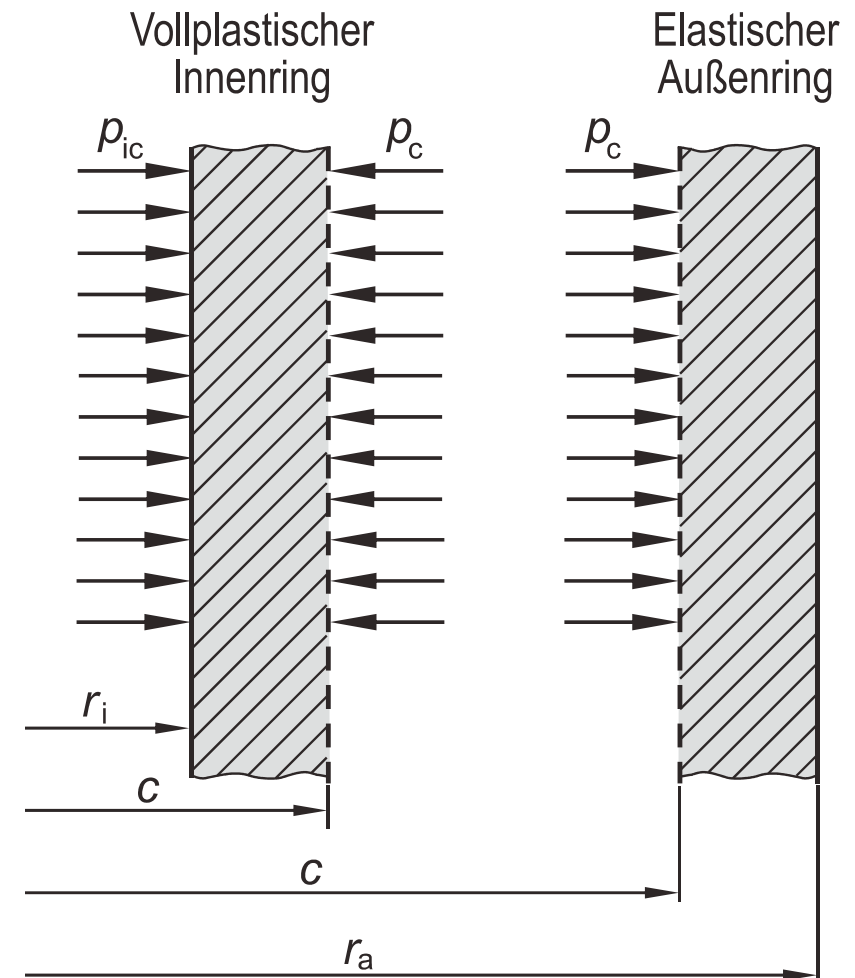
Behälter unter Innen- und Außendruck

Teilplastischer Zustand unter Innendruck ¹⁾

Der teilplastische Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass zwischen Innenrand ($r = r_i$) und Radius $r = c$ ($r_i < c < r_a$) ein **plastischer Innenring**, zwischen Radius $r = c$ und dem Außenrand ($r = r_a$) hingegen ein **elastischer Außenring** vorliegt.

Zusammenhang zwischen Innendruck p_{ic} und Grenzzradius c zwischen vollplastischen Innenring und dem elastischen Außenring:

$$p_{ic} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{c}{r_i} \right)^2 - \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$$



Behälter unter Innen- und Außendruck

Vollplastischer Innenring

Tangentialspannung

$$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right)$$

Radialspannung

$$\sigma_r = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 - 1 \right)$$

Axialspannung

$$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 \right)$$

Elastischer Außenring

Tangentialspannung

$$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$$

Radialspannung

$$\sigma_r = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$$

Axialspannung

$$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$$

Behälter unter Innen- und Außendruck

Vollplastischer Zustand unter Innendruck ¹⁾

Innendruck zum Erreichen des vollplastischen Zustandes

$$p_{i\text{VPL}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Radialspannung unter Innendruck (vollplastischer Zustand)

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$$

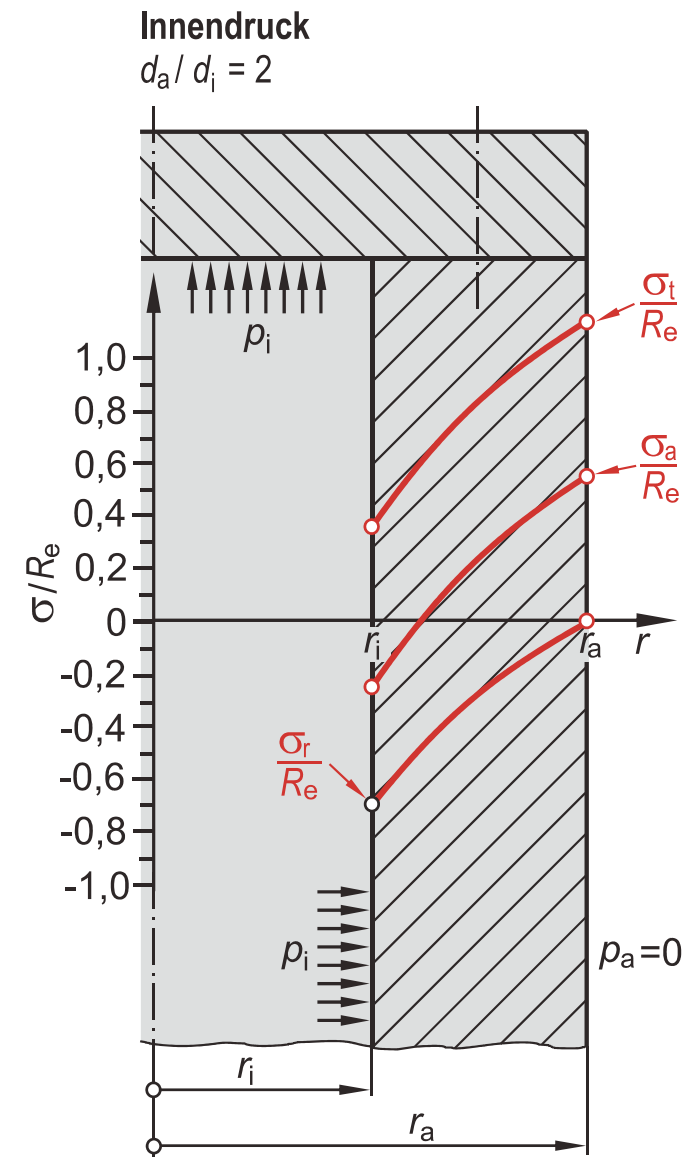
Tangentialspannung unter Innendruck (vollplast. Zustand)

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)\right)$$

Axialspannung unter Innendruck (vollplastischer Zustand)

$$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)\right)$$

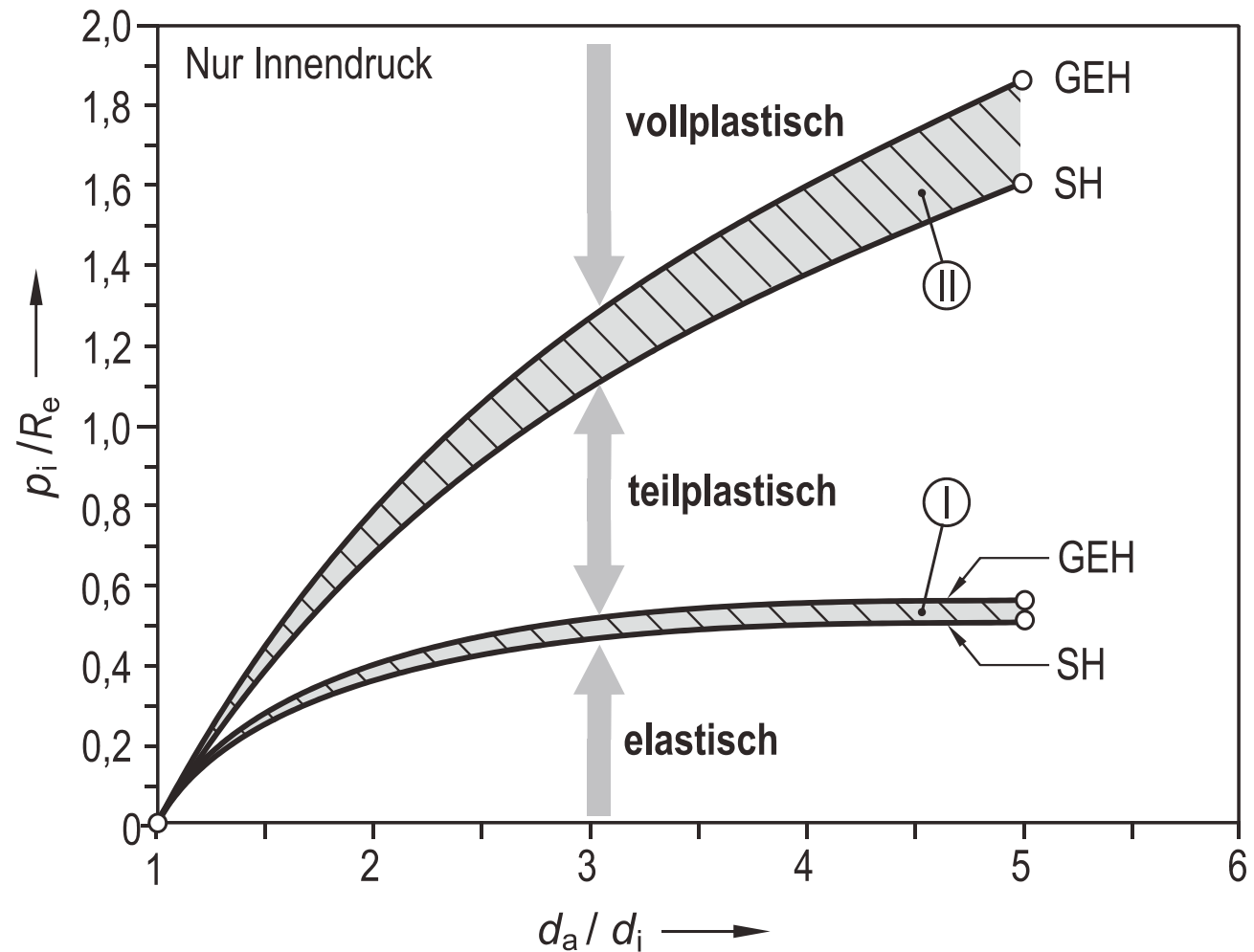
¹⁾ Eine Beanspruchung durch Außendruck bzw. durch Innen- und Außendruck soll nicht betrachtet werden.



Behälter unter Innen- und Außendruck

Zusammenfassung dickwandige Behälter unter Innendruck

Grenzkurven des bezogenen Innendrucks (p_i / R_e) in Abhängigkeit vom Durchmesser Verhältnis (d_a / d_i) für den elastischen, teilplastischen und vollplastischen Zustand



Behälter unter Innen- und Außendruck

Aufgabe 12.3



An einem beidseitig verschlossenen Rohr aus der unlegierten Stahlsorte C45E+QT mit einem Innendurchmesser von $d_i = 140 \text{ mm}$ und einer Wandstärke von $s = 5 \text{ mm}$ werden in Tangentialrichtung und in Axialrichtung Dehnungsmessungen durchgeführt.

Werkstoffkennwerte C45E+QT:

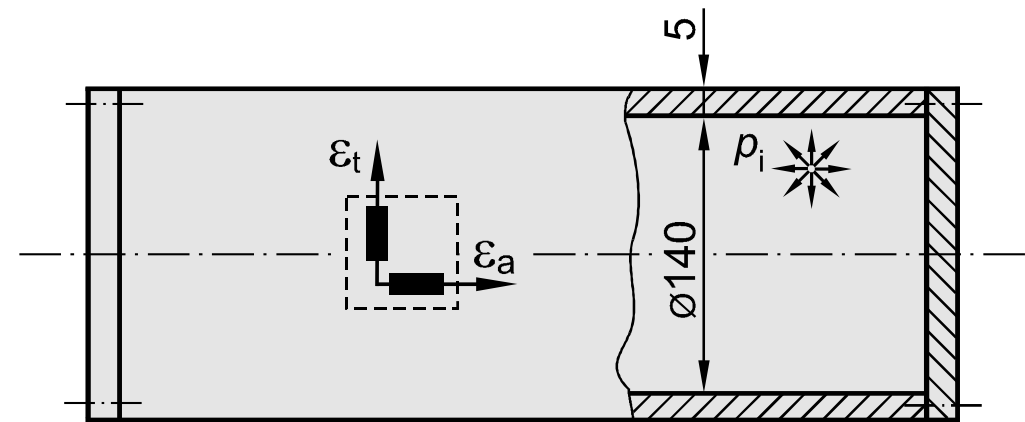
$$R_{p0,2} = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 750 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Berechnen Sie den Innendruck p_1 , falls mit Hilfe der Dehnungsmessstreifen in Tangentialrichtung eine Dehnung von $\varepsilon_{t1} = 0,8095 \text{ ‰}$ und in Axialrichtung $\varepsilon_{a1} = 0,1905 \text{ ‰}$ ermittelt wird.



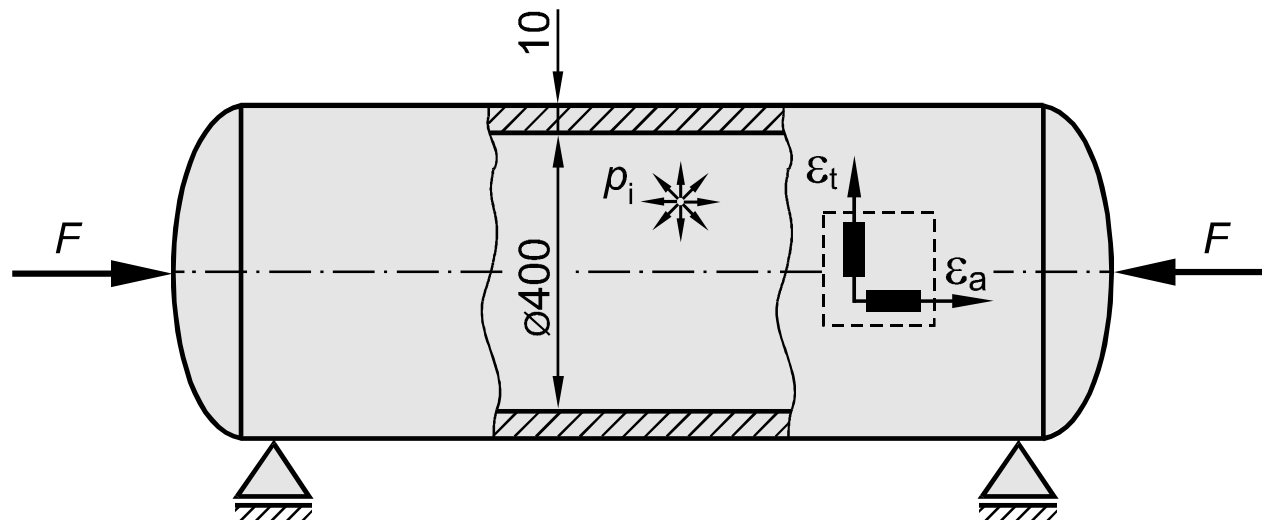
- b) Zusätzlich zum Innendruck p_1 soll eine statische Zugkraft F_1 in Axialrichtung des Rohres wirken. Berechnen Sie die zulässige statische Zugkraft F_1 , falls Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden soll.
- c) Bei einem zweiten Versuch wird der Druckbehälter durch einen unbekannten Innendruck p_2 und eine unbekannte Längskraft F_2 statisch beansprucht. Berechnen Sie den Innendruck und die Längskraft für eine Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{t2} = 0,2524 \text{ ‰}$ und $\varepsilon_{a2} = 0,5743 \text{ ‰}$.

Behälter unter Innen- und Außendruck

Aufgabe 12.6



An der Außenoberfläche eines Druckbehälters ($d_i = 400$ mm; $s = 10$ mm) aus der legierten Stahlsorte 13CrMo4-5 werden die Dehnungen $\varepsilon_t = 0,929$ ‰ (tangentielle Richtung) und $\varepsilon_a = -0,929$ ‰ (axiale Richtung) gemessen. Der Druckbehälter wird durch einen unbekannten Innendruck p_i und eine unbekannte axiale Druckkraft F statisch beansprucht.



Werkstoffkennwerte 13CrMo4-5:

$$R_{p0,2} = 380 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 620 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

Behälter unter Innen- und Außendruck

- a) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Dehnungswerten (ε_t und ε_a) die Tangentialspannung σ_t und die Axialspannung σ_a .
- b) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die durch σ_t und σ_a aufgespannte Ebene (Zylindermantelfläche). Ermitteln Sie diejenigen Schnittflächen dieser Ebene, die keine Schubspannungen beinhalten. Welche Schnittflächen enthalten hingegen keine Normalspannungen?
- c) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- d) Ermitteln Sie den Innendruck p_i und die axiale Druckkraft F , die gemeinsam die Dehnungen ε_t und ε_a verursachen.
- e) Anstelle einer Beanspruchung aus Innendruck p_i mit überlagerter Druckkraft F , kann derselbe Spannungszustand in der Behälterwand auch durch eine andere Beanspruchungsart erzeugt werden. Nennen Sie eine mögliche Beanspruchung und berechnen Sie deren Größe.

Behälter unter Innen- und Außendruck

Aufgabe 12.11



Ein Druckbehälter mit $d_i = 600$ mm und $s = 12$ mm aus dem legierten Vergütungsstahl 50CrMo4 wird im Betrieb durch den statisch wirkenden Innendruck $p_i = 20$ MPa sowie durch die statisch wirkenden Kräfte $F_1 = 900$ kN und $F_2 = 1500$ kN belastet.

Im Rahmen einer experimentellen Spannungsanalyse werden vier Dehnungsmessstreifen appliziert. Die Messebenen von DMS B und DMS C fallen hierbei mit der neutralen Faser zusammen (siehe Abbildung).

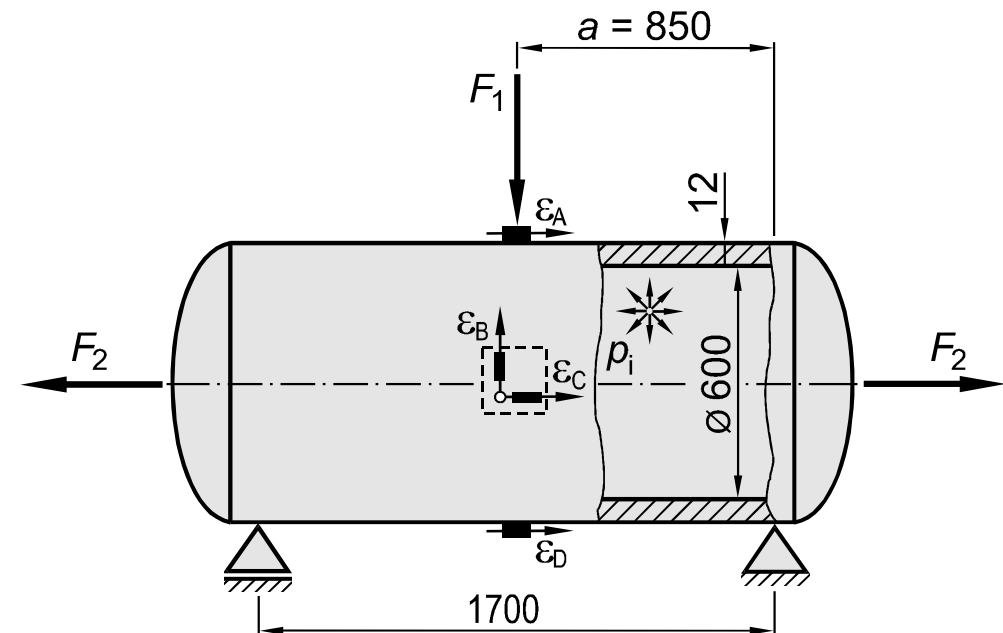
Werkstoffkennwerte 50CrMo4:

$$R_{p0,2} = 870 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1080 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Behälter unter Innen- und Außendruck

- a) Berechnen Sie die Dehnungsanzeigen der vier Dehnungsmessstreifen, falls der Druckbehälter durch den Innendruck p_i sowie durch die Kräfte F_1 und F_2 beansprucht wird. Schubspannungen durch Querkräfte sollen vernachlässigt werden.
- b) Berechnen Sie, unter Verwendung der Schubspannungshypothese, die Sicherheit gegen Fließen an der höchst beanspruchten Stelle der Außenoberfläche. Ist die Sicherheit ausreichend?

Hinweis: Versuchen Sie, zur weiteren Übung, aus den in Aufgabenteil a) errechneten Dehnungen die Kräfte F_1 und F_2 sowie den Innendruck p_i zu berechnen.

Behälter unter Innen- und Außendruck

Aufgabe 12.13



Ein Druckbehälter aus Werkstoff 16Mo3 ($d_i = 300$ mm; $s = 15$ mm) wird durch einen unbekannten Innendruck p_i und ein zusätzliches, unbekanntes Torsionsmoment M_t beansprucht.

Ermitteln Sie den Innendruck p_i sowie den Betrag und die Wirkungsrichtung des Torsionsmomentes M_t , falls die auf der Behälteroberfläche applizierte DMS-Rosette (siehe Abbildung) die folgenden Messwerte liefert:

$$\varepsilon_A = 0,2011 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_B = 0,5715 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_C = 0,3989 \text{ ‰}$$

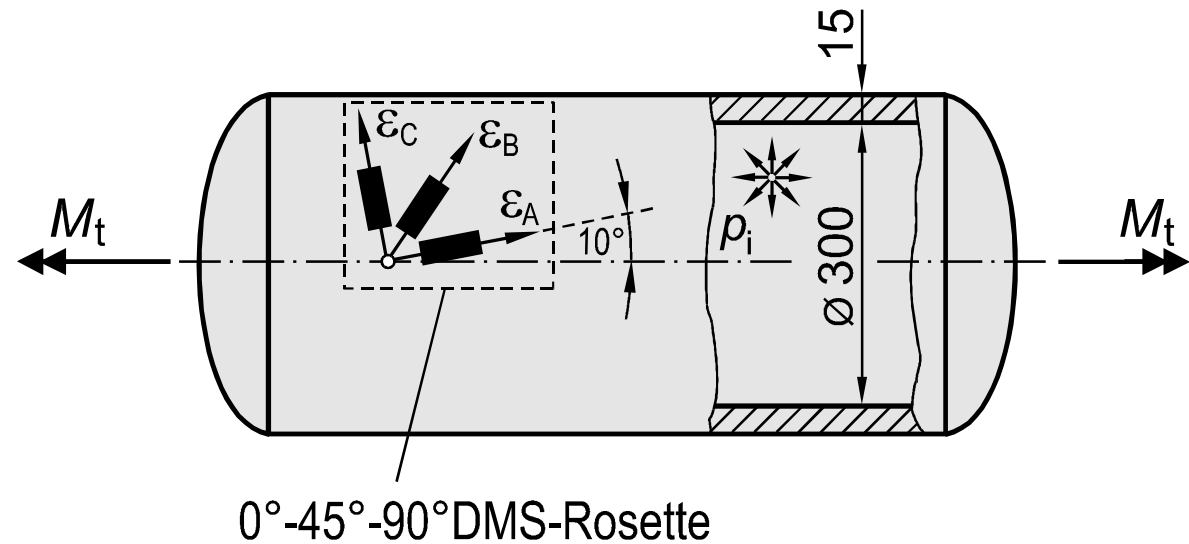
Werkstoffkennwerte 16Mo3:

$$R_{p0,2} = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 510 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

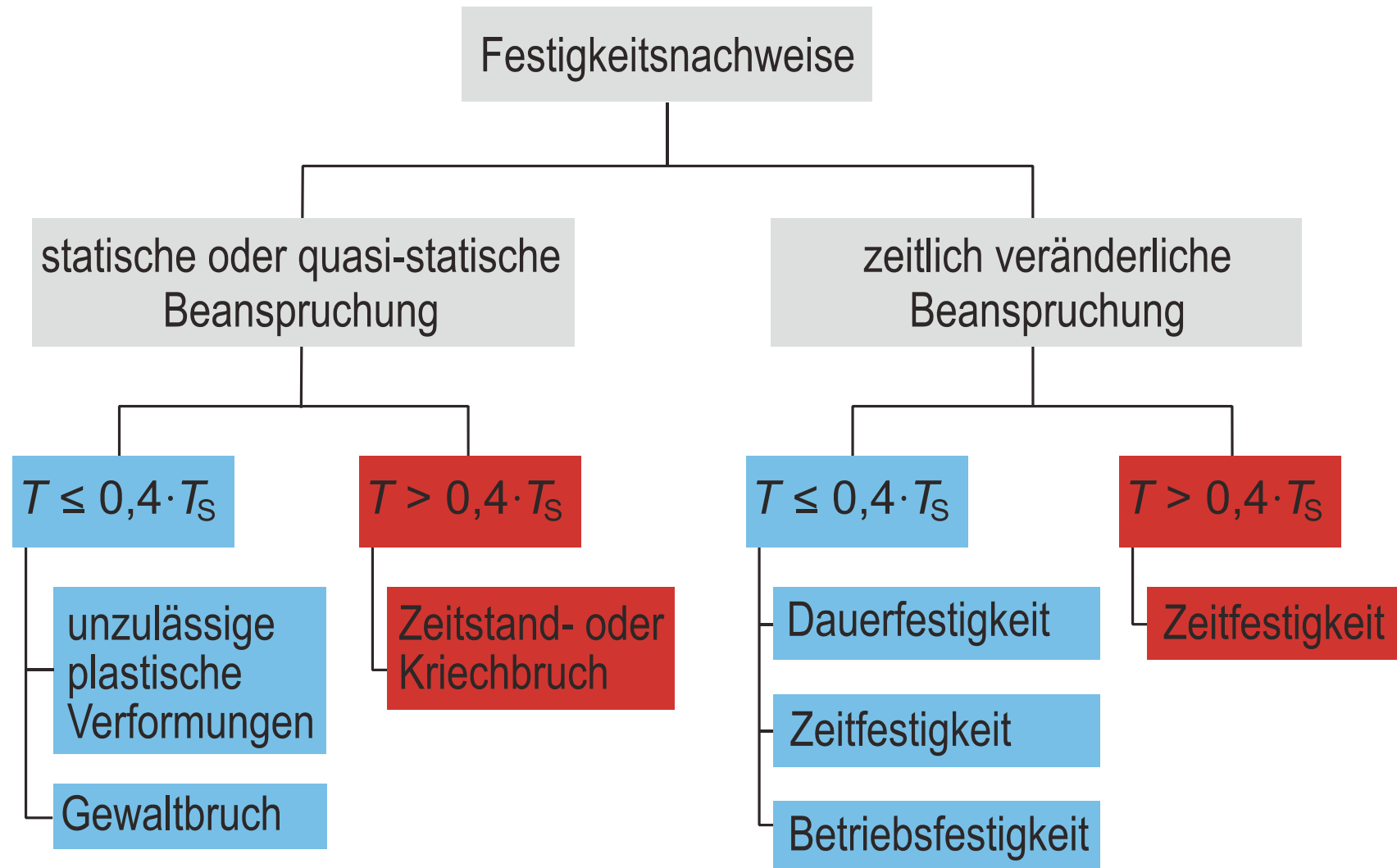


Kapitel 13

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Festigkeitsnachweise für metallische Werkstoffe

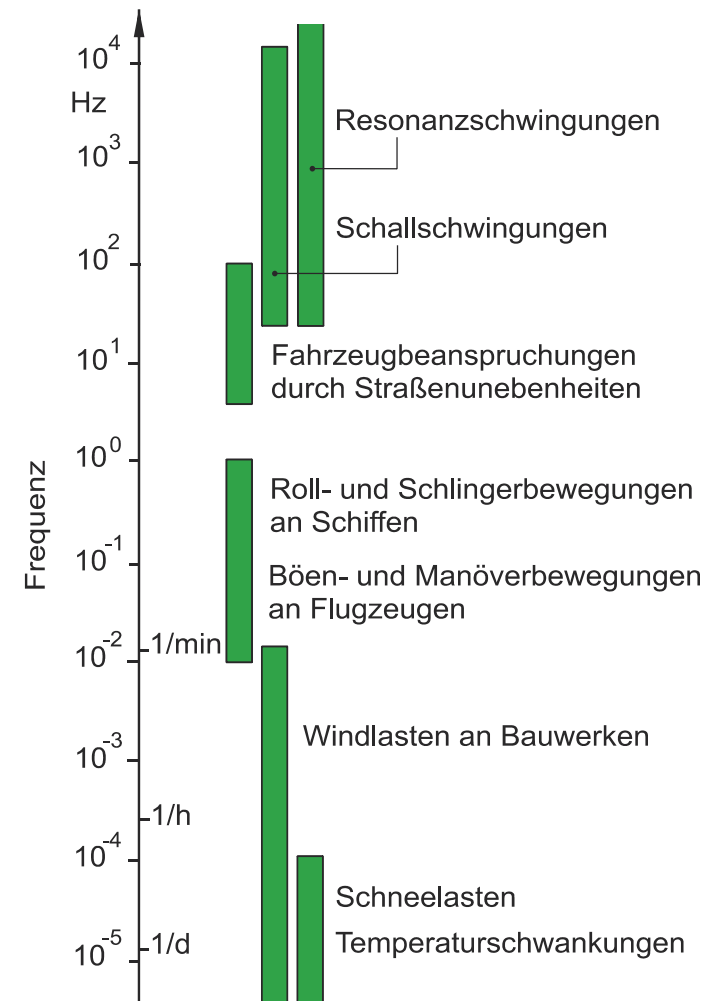


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Beispiele zeitlich veränderlich beanspruchter Strukturen

Die Mehrzahl der technischen Bauteile unterliegt im Betrieb einer zeitlich veränderlichen Beanspruchung. Eine derartige Schwingbeanspruchung kann entstehen durch:

- Umlaufbiegung rotierender Wellen.
- Vibrationen, insbesondere in oder in der Nähe der Resonanzfrequenz.
- An- und Abfahrvorgänge von Maschinen und Anlagen.
- Straßenunebenheiten bei Fahrzeugen.
- Seegang bei Schiffen und Off-Shore-Strukturen.
- Turbulenzen, Start- und Landevorgänge bei Flugzeugen.

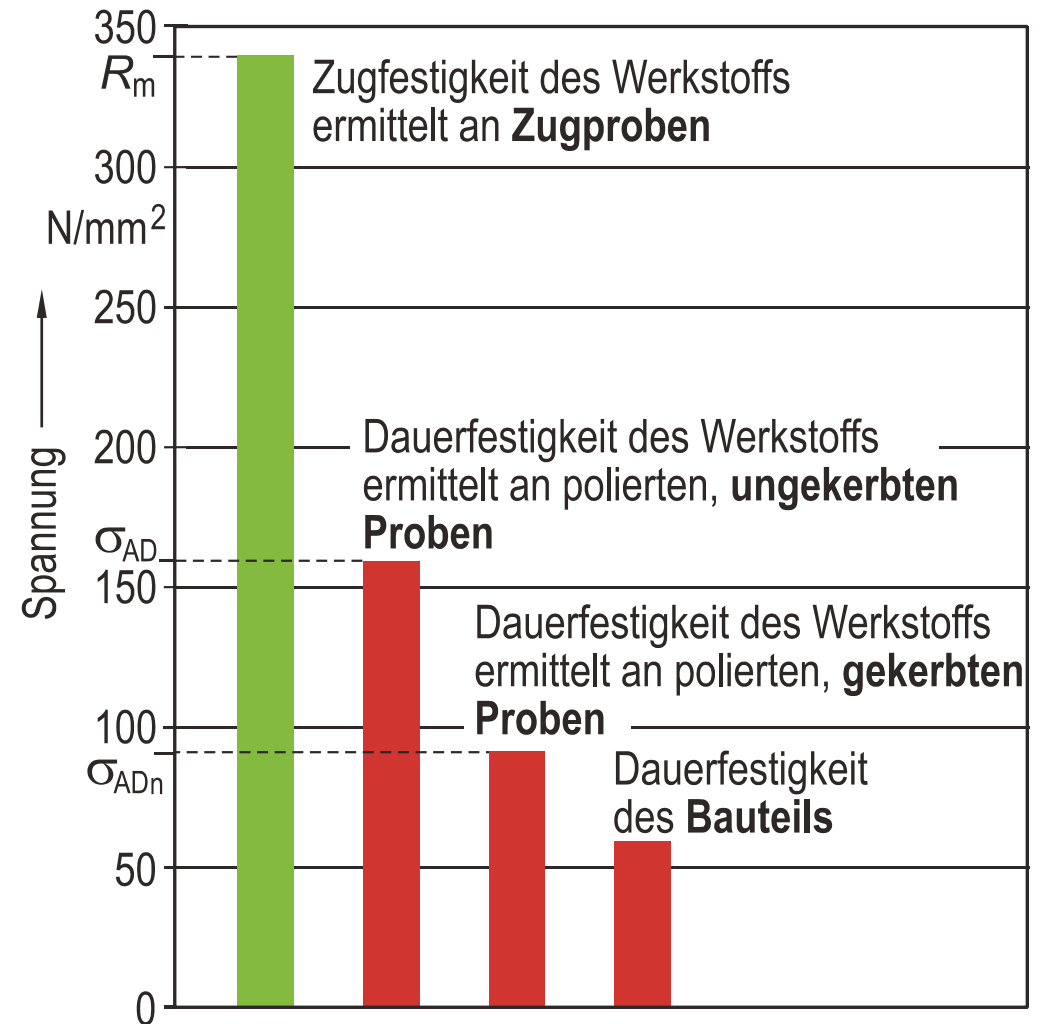


Frequenzbereiche schwingbruchgefährdeter Maschinenteile und Bauwerke

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Festigkeitskennwerte bei zeitlich veränderlicher Beanspruchung

Bei schwingender Beanspruchung ist die auf Dauer ohne Versagen ertragbare Nennspannung deutlich geringer im Vergleich zur statischen Festigkeit.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Problemstellung zum Nachweis der Ermüdungsfestigkeit metallischer Bauteile

Statischer Festigkeitsnachweis

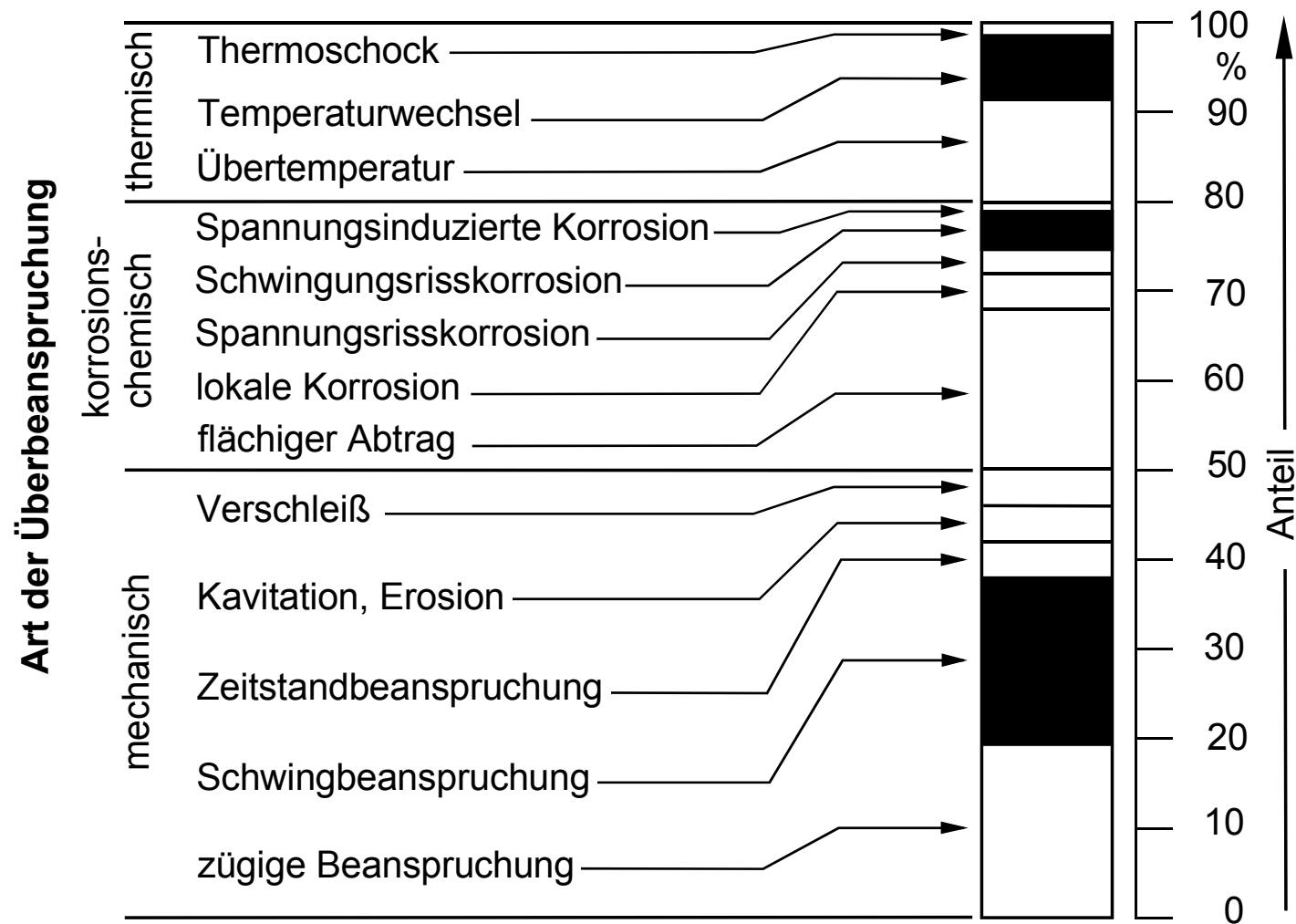
- Werkstoff kann als diskretes Kontinuum angesehen werden.
- Stoffgesetze sind analytisch formulierbar.
- Berechnung von Spannungen oder Verformungen ist mit Hilfe elementarer Gleichungen oder (z. B.) mittels FEM möglich.
- Vergleich der maximalen Spannung bzw. Dehnung (Beanspruchung) mit geeigneten Werkstoffkennwerten (Beanspruchbarkeit) liefert den Festigkeitsachweis.

Nachweis der Ermüdungsfestigkeit (Dauer-, Zeit-, Betriebsfestigkeit)

- Werkstoffverhalten (Anriss- und Risswachstum) ist mathematisch nur bedingt oder nicht formulierbar.
- Einflüsse auf die Entstehung und das Wachstum eines Ermüdungsrissses sind außerordentlich vielfältig und teilweise nicht quantifizierbar.
- **Es gibt kein allgemein gültiges Berechnungskonzept für den Ermüdungsnachweis.**
- **Jede einzelne kritische Stelle muss hinsichtlich der relevanten die Ermüdung beeinflussenden Faktoren sowie geeigneter Absicherungskonzepte individuell beurteilt werden.**

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Ermüdungsbedingte Werkstoffschäden (nach Hagn und Schüller)



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

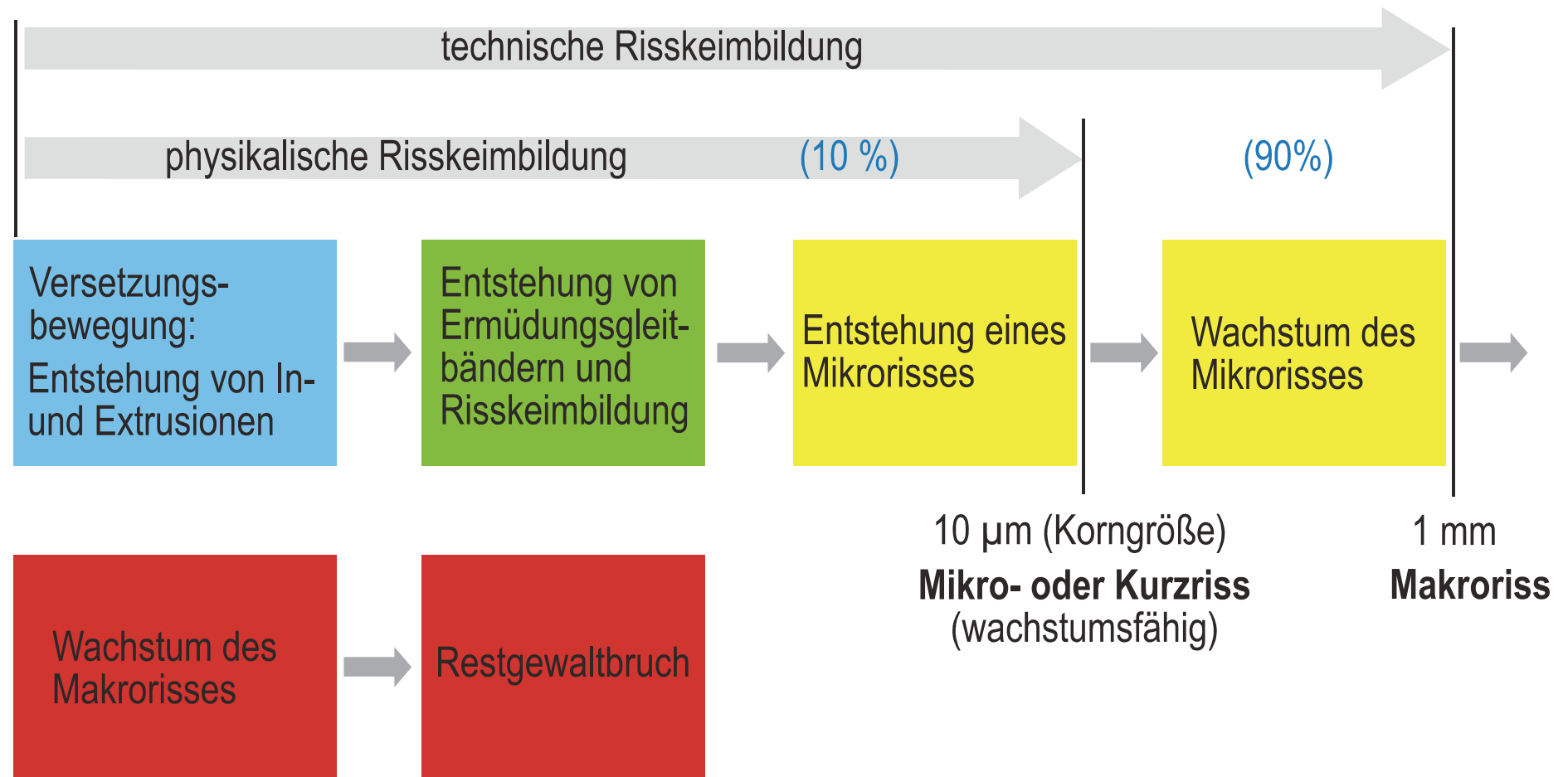
Beispiele für katastrophale Schadensfälle infolge Materialermüdung

Datum	Schadensfall	Ursache
1842	Zugunglück auf der Versailler Bahn.	Ermüdungsbruch an den Achsen.
1927	Auf der Fahrt nach USA fallen am Luftschiff LZ 127 ("Graf Zeppelin") innerhalb von nur wenigen Stunden vier der fünf Motoren aus. Nur durch den fünften, noch intakten Motor gelingt es, Luftschiff und Passagiere zu retten.	Torsionsschwingungen führen zu Schwingbrüchen an den Kurbelwellen.
10.01.1954 08.04.1954	Absturz zweier Passagierflugzeuge des Typs „De Havilland Comet“ aus großer Höhe bereits nach kurzer Betriebszeit.	Aufreißen des Rumpfes ausgehend von einem Ermüdungsriss u. a. an einer Fensteröffnung.
27.03.1980	Kentern der halbtauchenden Bohrplattform „Alexander L. Kielland“.	Ermüdungsbruch einer Rohrstrebe zwischen den Pontonsäulen ausgehend von einem eingeschweißten Hydrophonstutzen.
4.10.1992	Absturz eines voll betankten Großraumfrachtflugzeuges vom Typ Boeing 747-200 in einen Wohnblock in Amsterdam kurz nach dem Start.	Ermüdungsbruch an einem Bolzen der Triebwerkaufhängung. Durch das Abreißen zweier Triebwerke wurde der Flügel beschädigt, sodass die Steuerbarkeit verloren ging. Der Ermüdungsriss mit einer Tiefe von etwa 3,5 mm wurde wahrscheinlich bei der Inspektion übersehen.
03.06.1998	ICE Unglück bei Eschede.	Ermüdungsbruch an einem Radreifen.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Entstehung eines Ermüdungsrisses

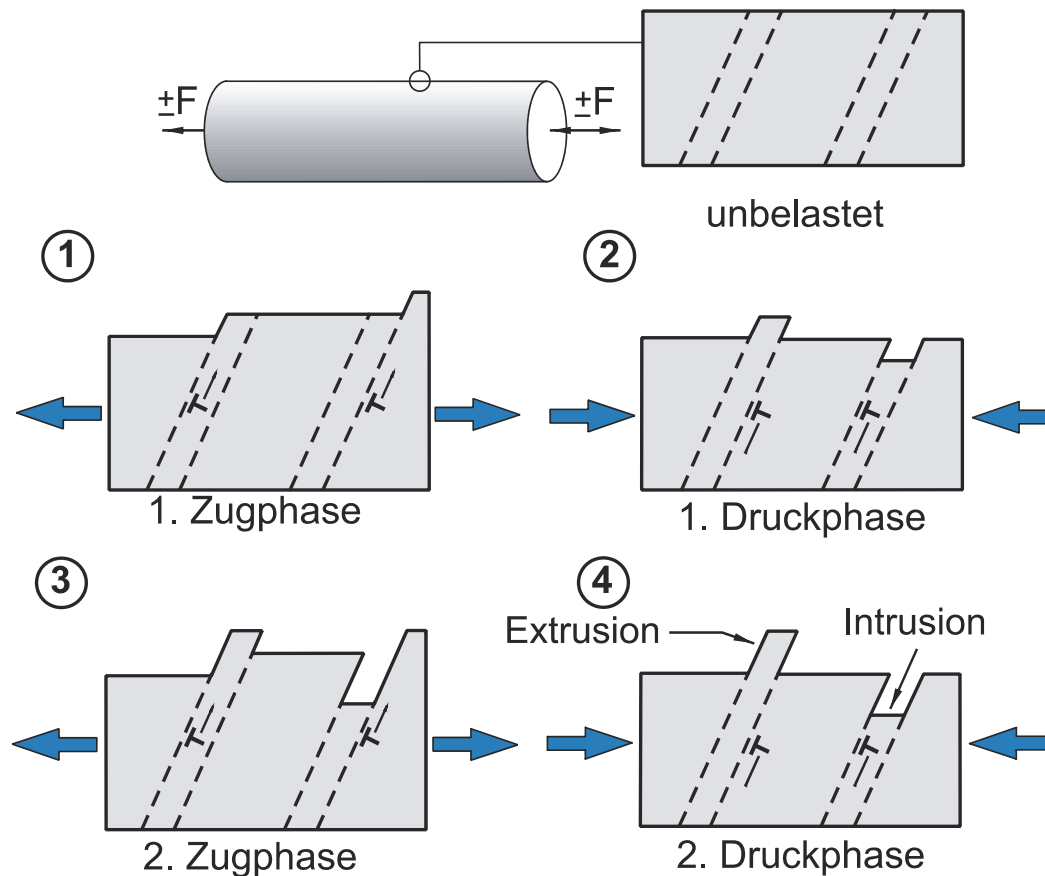
Übersicht



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Phasen der Entstehung eines Ermüdungsrisses

Phase 1: Versetzungsbewegung mit Bildung von Extrusionen und Intrusionen



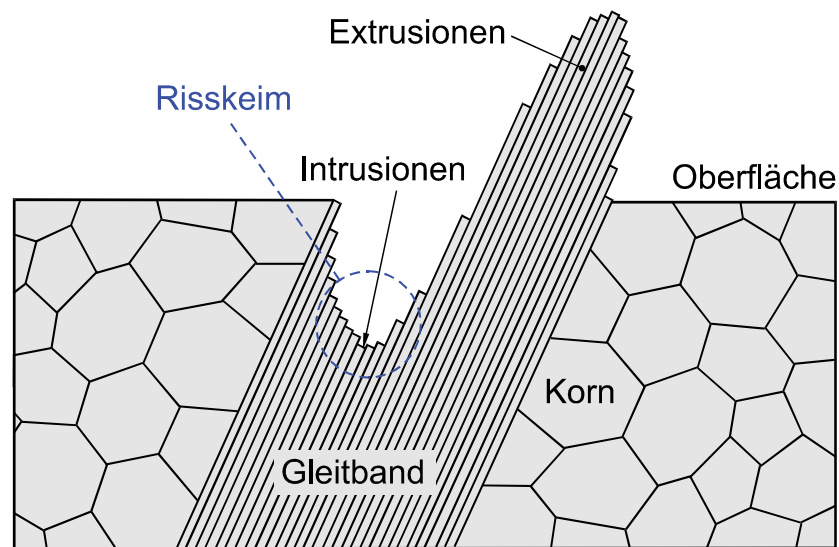
Rissentstehung vorzugsweise an Stellen örtlicher Spannungsüberhöhung

Beispiele:

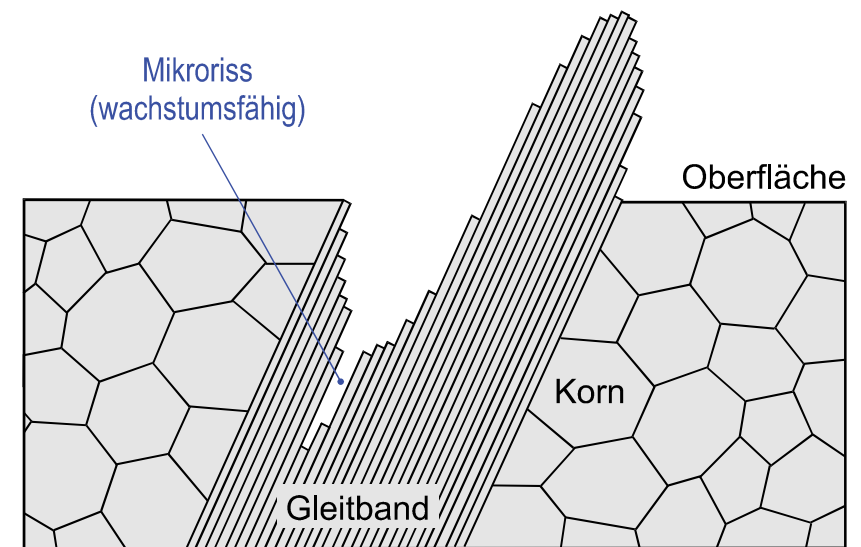
- konstruktive Kerben
- Einschlüsse
- Hohlräume
- bereits vorhandene Anrisse

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Phase 2: Entstehung von Ermüdungsgleitbändern und Risskeimbildung

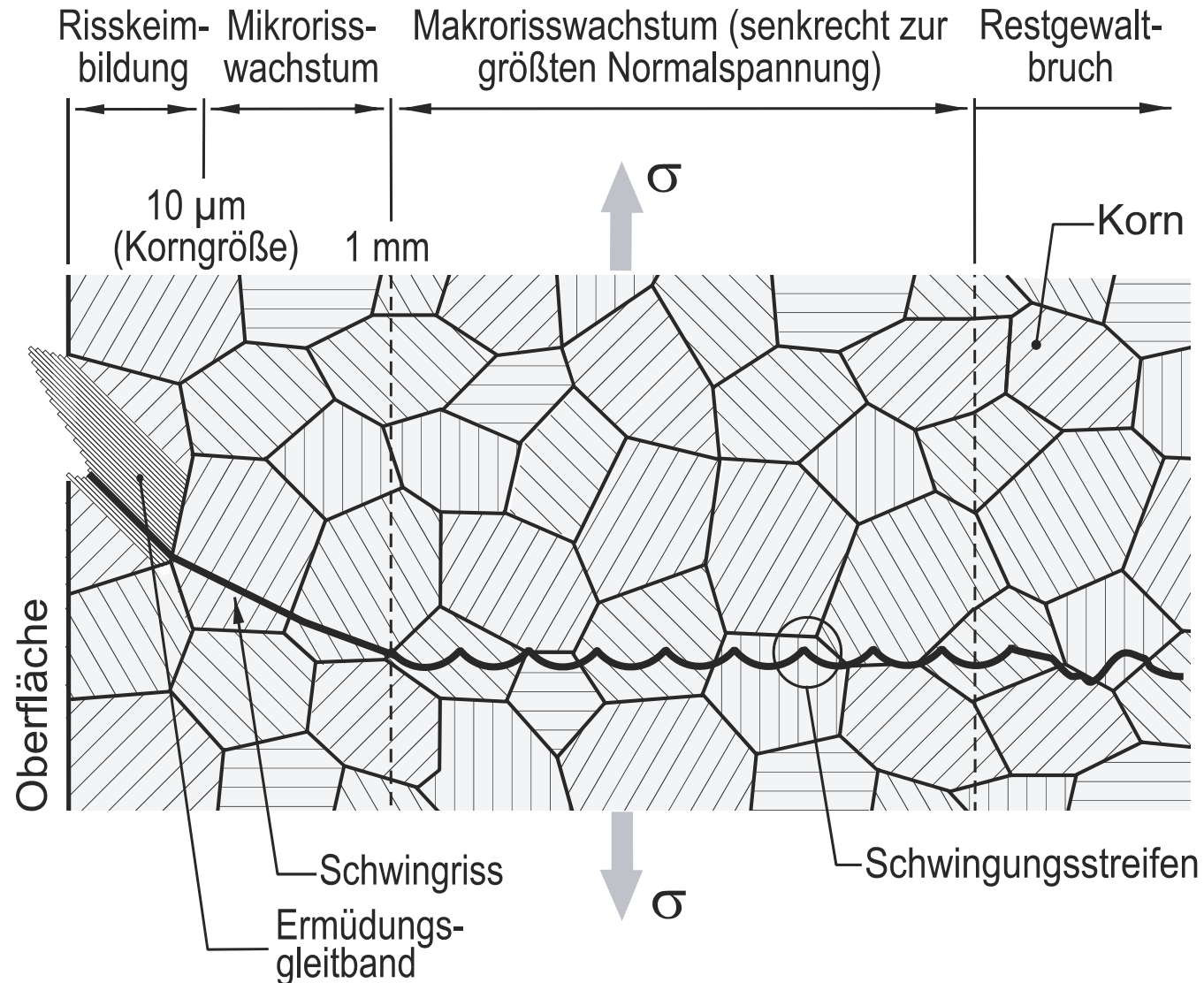


Phase 3: Entstehung eines wachstumsfähigen Mikrorisses (Kurzzriss)
Voraussetzung: Risslänge \geq Korngröße



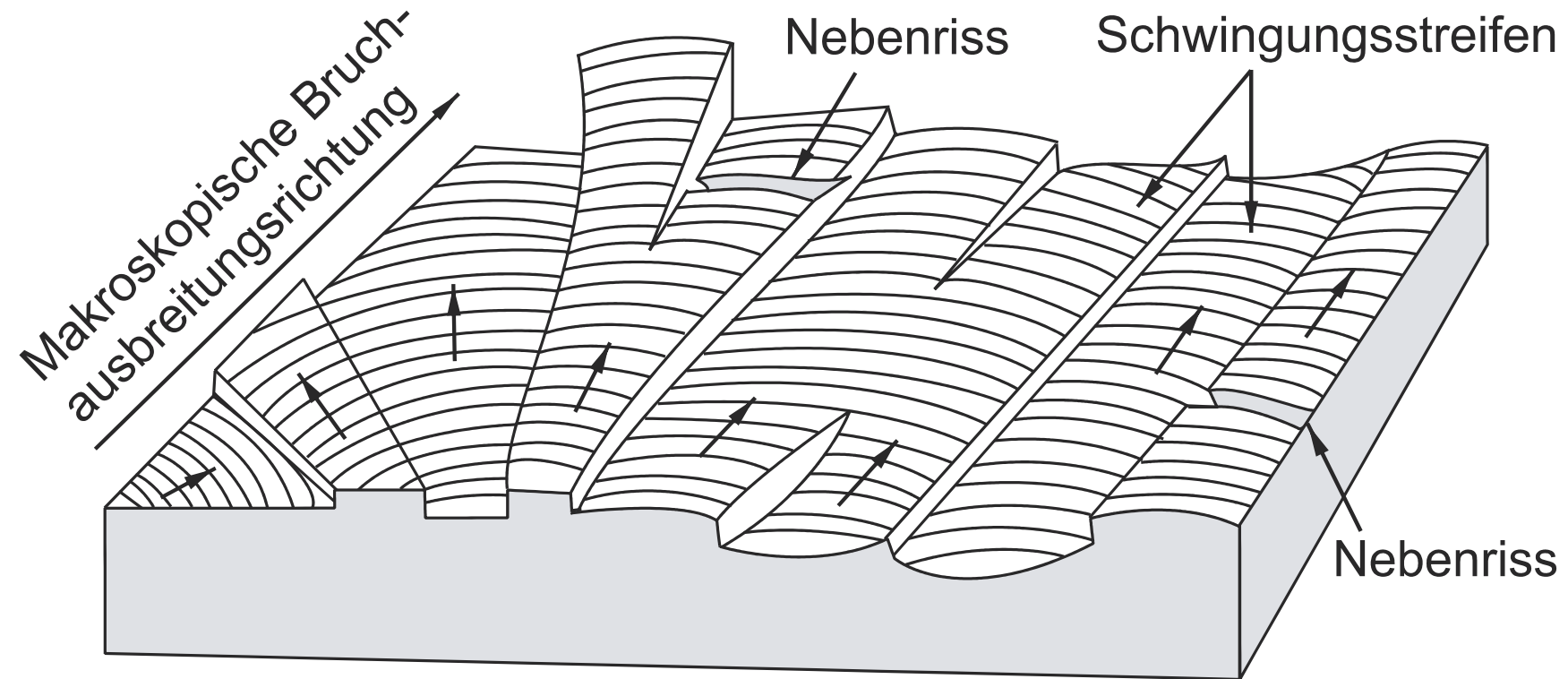
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Phase 4: Stabiles Risswachstum und Restgewaltbruch



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Typische Ermüdungsbruchfläche

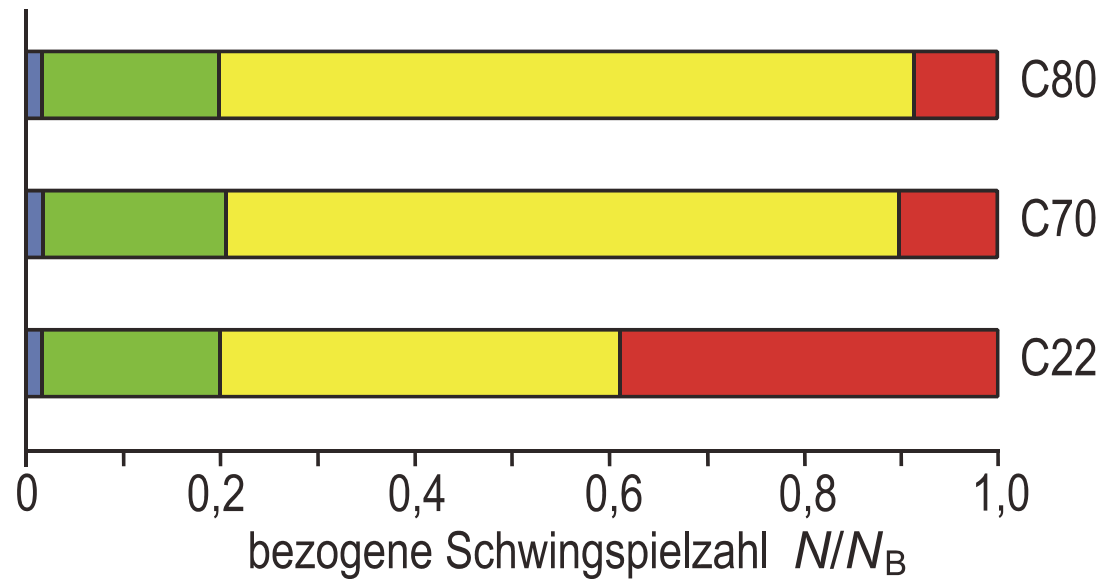


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Zeitliche Anteile der einzelnen Phasen der Werkstoffermüdung bis zum Bruch

Ein Riss kann in der Regel mit Hilfe betrieblich anwendbarer Inspektionsverfahren erst ab einer Größe von etwa 1 mm (**Makroriss**) nachgewiesen werden.

Betrachtet man die Zeitspannen bis zum Ermüdungsbruch, dann entfallen etwa 60% bis 90% der Lebensdauer auf das Wachstum des Mikrorisses, während die Zeitdauer für das Wachstum des Makrorisses (Risslänge > 1 mm) nur noch einen relativ geringen Anteil an der gesamten Lebensdauer einnimmt.

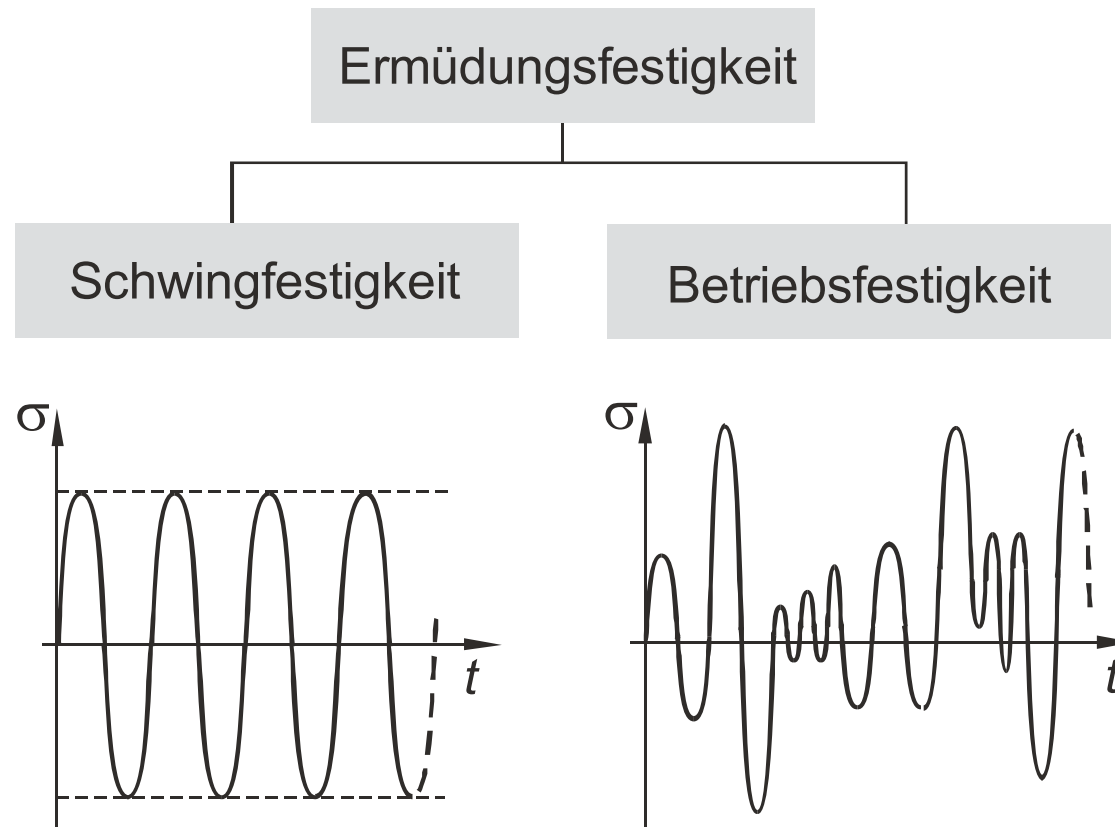


- Entstehung von ersten Ex- und Intrusionen
- Entstehung von Ermüdungsgleitbändern und Risskeimbildung
- Wachstum des Mikrorisses
- Wachstum des Makrorisses

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Begriffsdefinitionen

Ermüdungs-, Schwing- und Betriebsfestigkeit



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Spannungsamplitude, Mittelspannung, Schwingspiel, Spannungsverhältnis

Mittelspannung

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$$

Spannungsamplitude

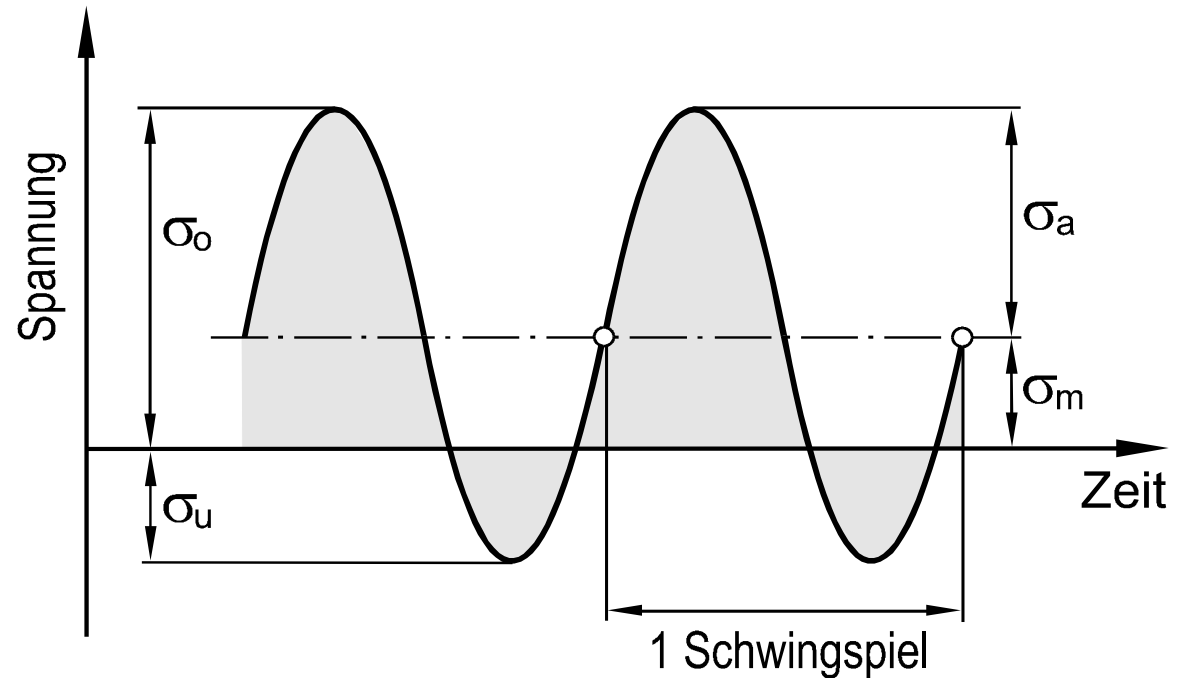
$$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$$

Spannungsverhältnis

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

Zusammenhang zwischen Spannungsamplitude, Mittelspannung und Spannungsverhältnis

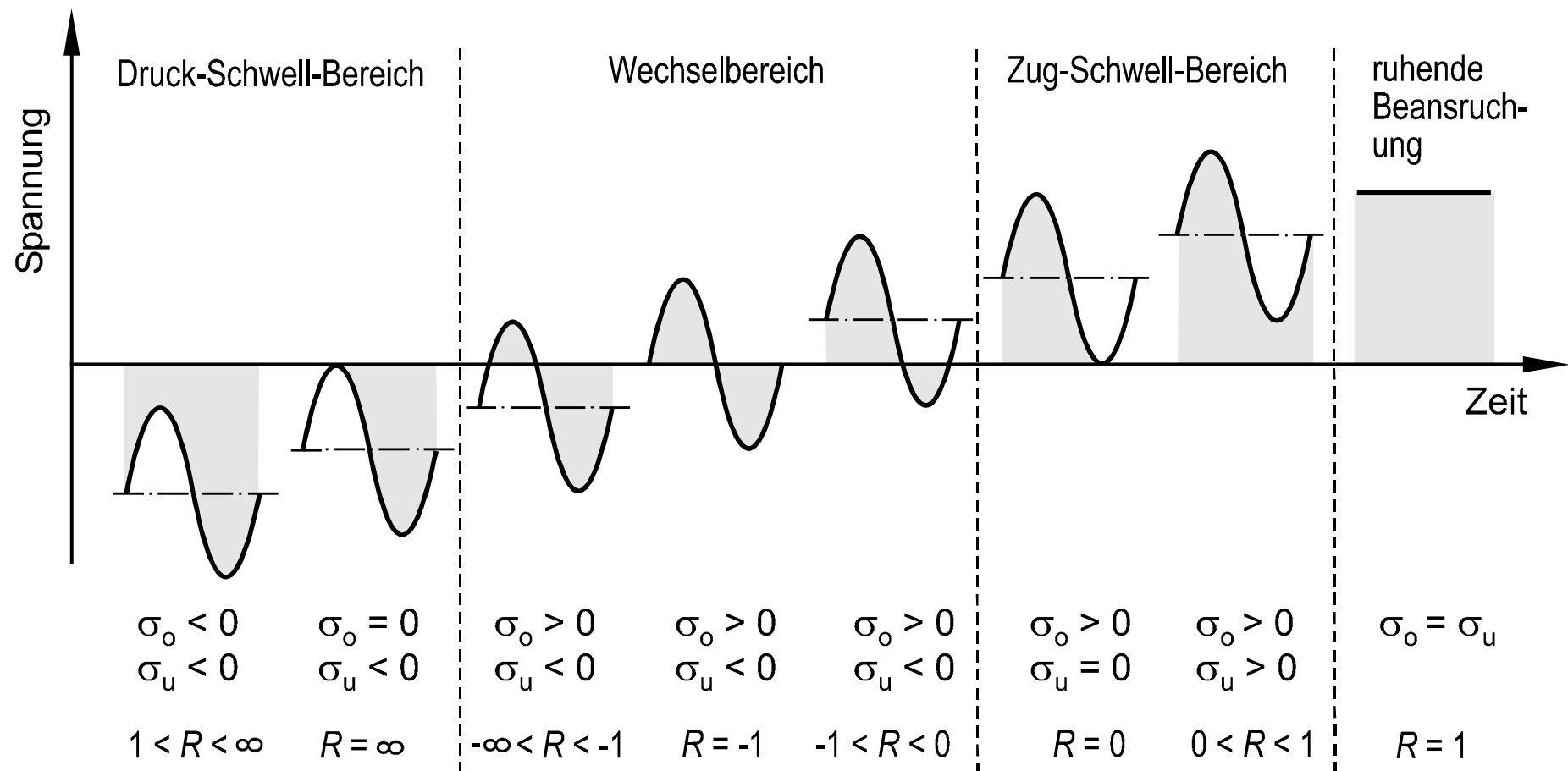
$$\sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \cdot \sigma_m$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

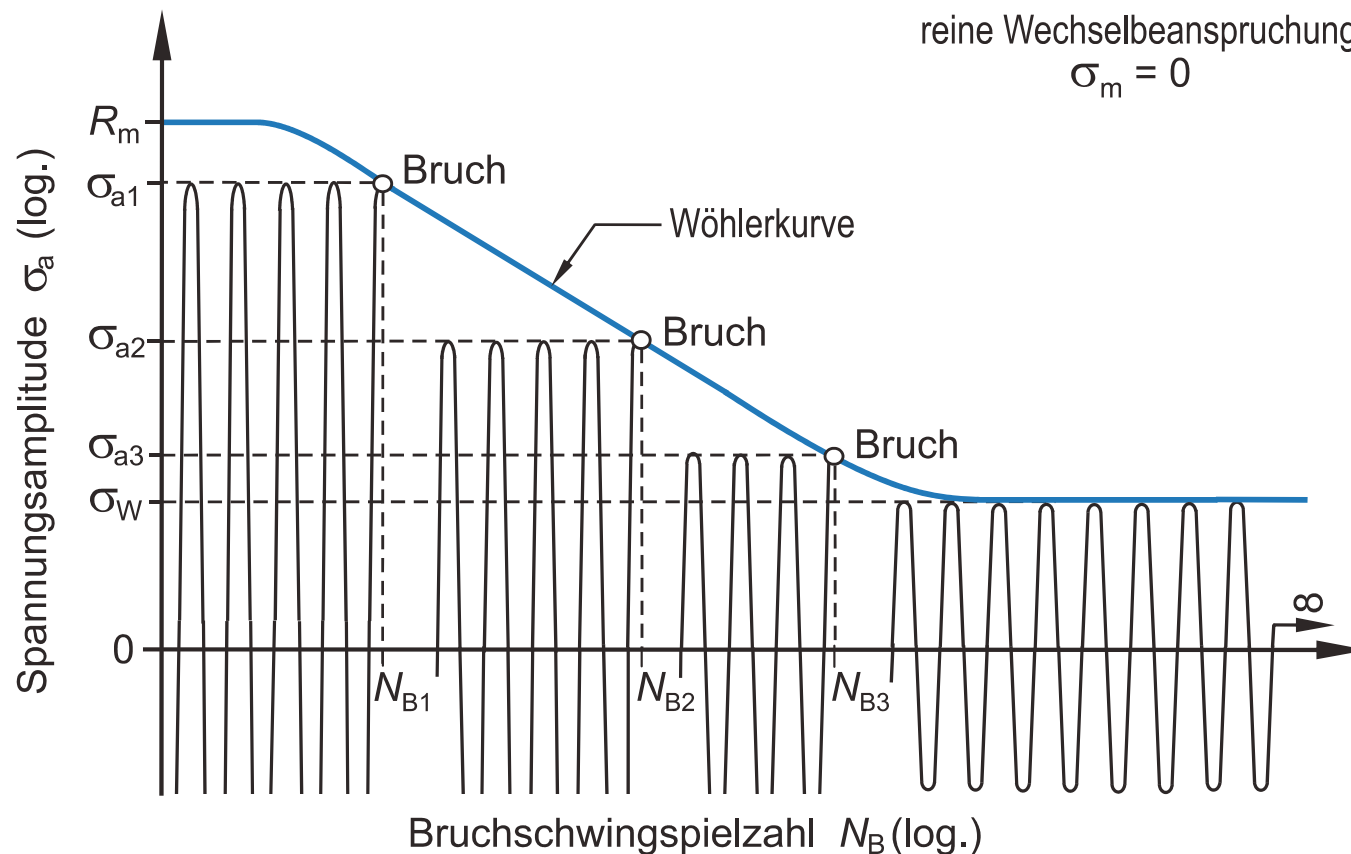
Wechsel- und Schwellbeanspruchung

- Zug-Schwellbereich: $\sigma_o > 0$ und $\sigma_u > 0$ bzw. $0 \leq R < 1$
- Wechselbereich: $\sigma_o > 0$ und $\sigma_u < 0$ bzw. $-\infty < R < 0$
- Druck-Schwellbereich: $\sigma_o < 0$ und $\sigma_u < 0$ bzw. $1 < R \leq \infty$



Wöhlerversuch und Wöhlerkurve

Wöhlerkurve für den Fall einer Schwingbeanspruchung ohne Mittelspannung ($\sigma_m = 0$)



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

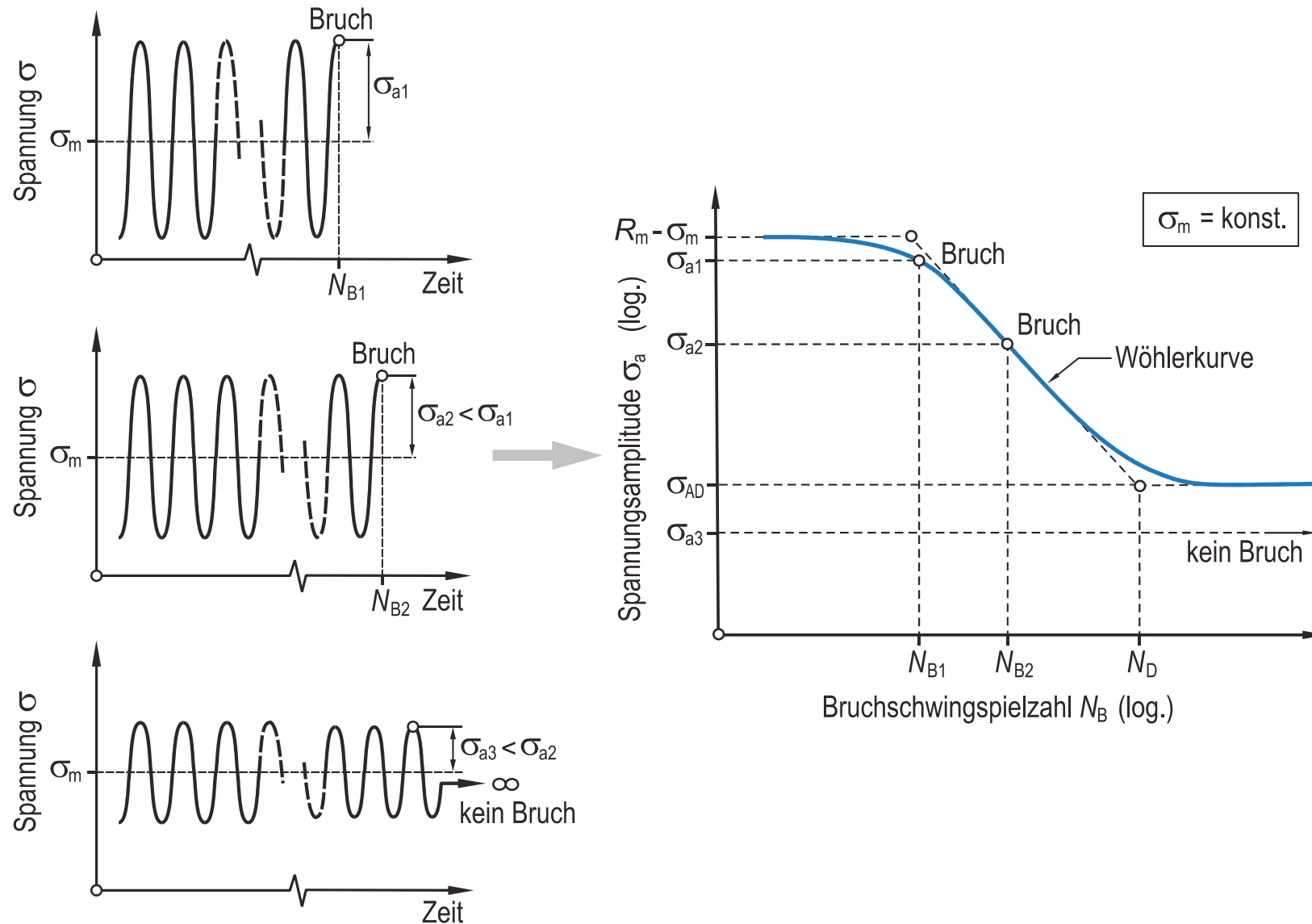
Beim **Wöhlerversuch** werden hinsichtlich Werkstoff, Geometrie und Bearbeitung gleichwertige, ungekerbte oder gekerbte Proben oder Bauteile nacheinander mit (für alle Proben) gleicher Mittelspannung σ_m und jeweils gestaffelter Spannungsamplitude σ_a solange einer meist sinusförmigen Schwingbeanspruchung unterworfen, bis ein Ermüdungsbruch eintritt.

Werden die jeweiligen Spannungsamplituden σ_a (mitunter auch die Schwingbreiten $\Delta\sigma = 2 \cdot \sigma_a$) über der bis zum Bruch ertragbaren Schwingspielzahl N_B in einem Diagramm aufgetragen, dann erhält man die **Wöhlerkurve** (auch als **Wöhlerlinie** bzw. **Wöhlerdiagramm** bezeichnet).

Es soll an dieser Stelle vereinbart werden, dass *Beanspruchungswerte* Kleinbuchstaben als Index (z. B. σ_a , σ_o oder σ_u), *Festigkeitskennwerte* hingegen Großbuchstaben (z. B. σ_A , σ_W , σ_O oder σ_U) erhalten sollen.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Wöhlerkurve für den Fall einer Schwingbeanspruchung mit Mittelspannung ($\sigma_m \neq 0$)

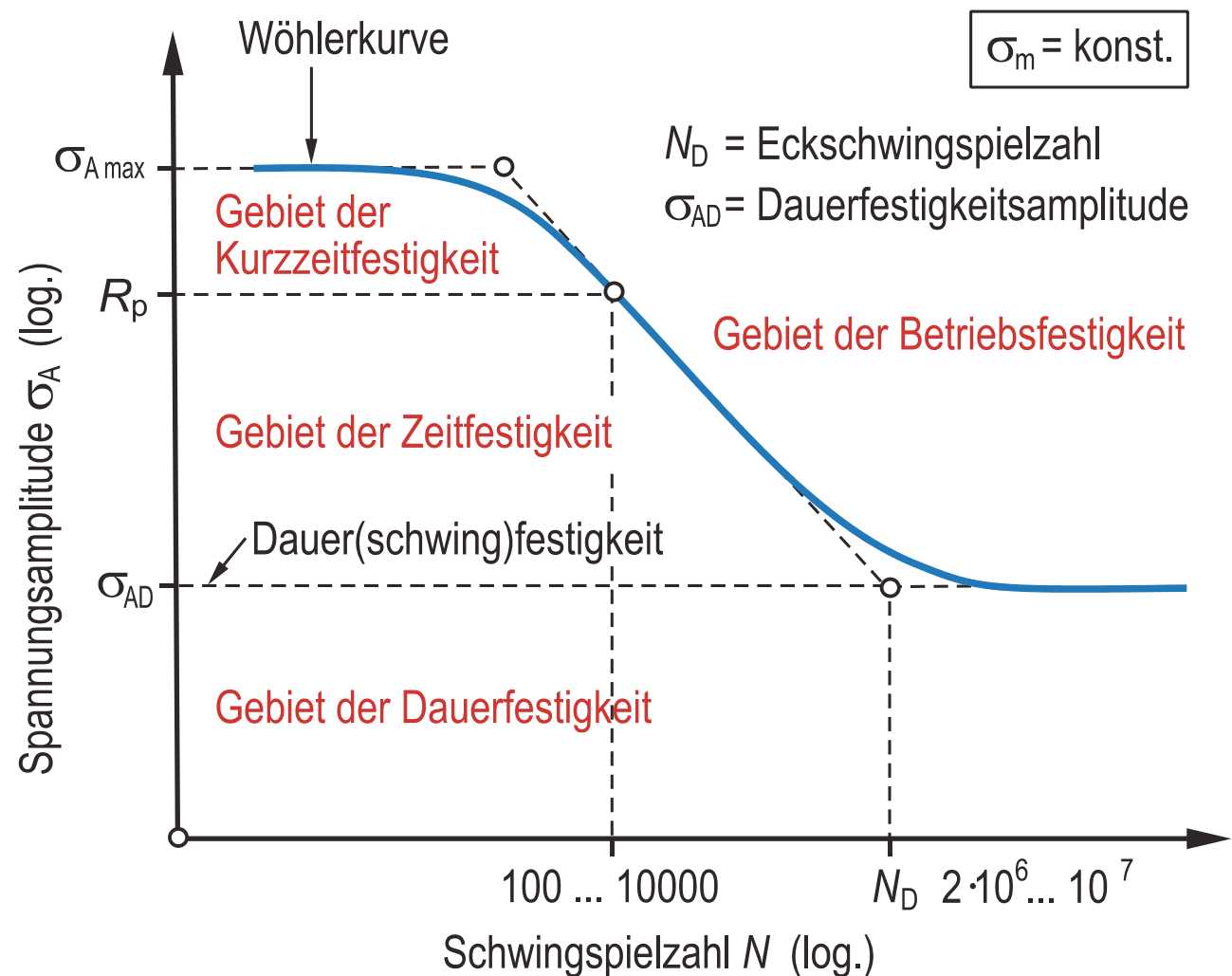


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einteilung der Wöhlerkurve

Mit Hilfe der Wöhlerkurve können verschiedene Gebiete voneinander abgegrenzt werden. Üblicherweise unterscheidet man:

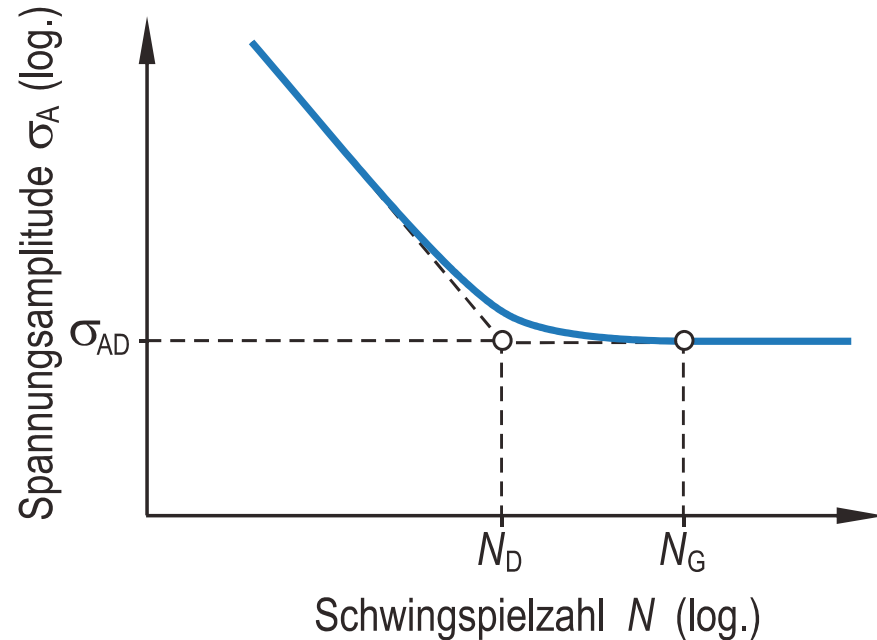
- Kurzzeitfestigkeit
- Zeitfestigkeit
- Dauerfestigkeit
- Betriebsfestigkeit



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

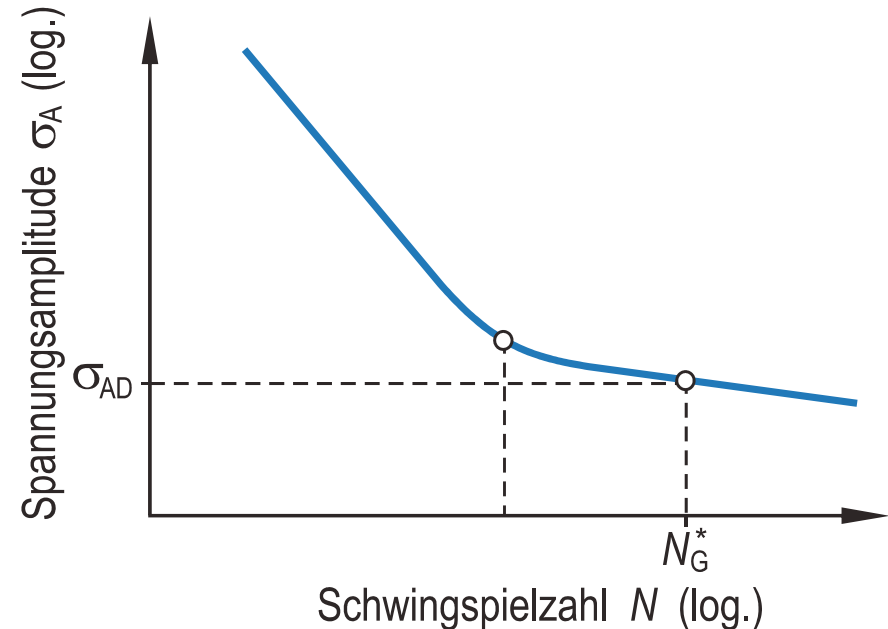
Wöhlerkurven mit und ohne Dauerfestigkeit

Wöhlerkurve *mit* ausgeprägter Dauerfestigkeit



- ferritisch-perlitische Stähle
- Titanlegierungen

Wöhlerkurve *ohne* ausgeprägte Dauerfestigkeit



- ferritisch-perlitische Stähle und Titanlegierungen
 - bei erhöhter Temperatur
 - Einfluss von Korrosion
 - regelmäßige Überbeanspruchung
- Metalle mit kfz-Gitter wie z. B.:
 - Austenitische Cr-Ni-Stähle
 - Al und Al-Legierungen
 - Cu und Cu-Legierungen

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Analytische Beschreibung der Wöhlerkurve

Bei doppeltlogarithmischer Auftragung der Ergebnisse des Wöhlerversuchs kann die Wöhlerkurve durch Geradenabschnitte angenähert und analytisch beschrieben werden.

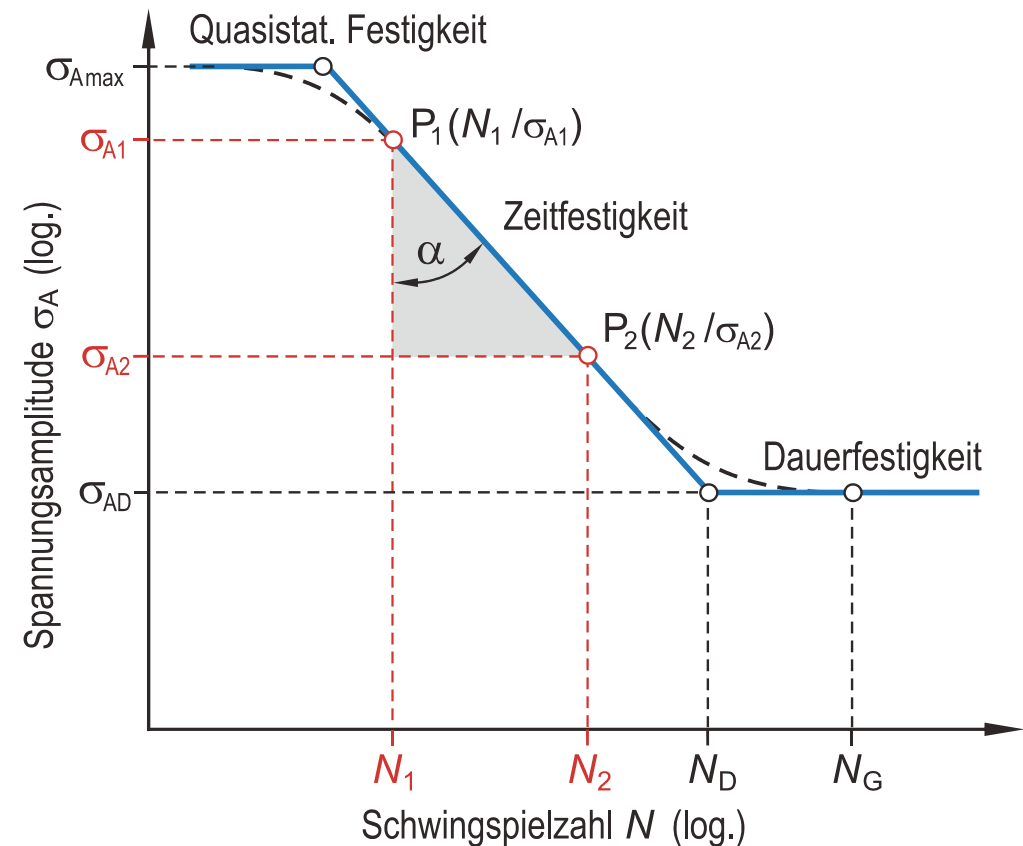
Zum Bruch führende Spannungsamplitude

$$\sigma_{A \max} = R_m \cdot \frac{1-R}{2}$$

Wöhlerkurve im Zeitfestigkeitsbereich

$$\sigma_A = \sigma_{A1} \cdot \left(\frac{N}{N_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \quad \text{bzw.}$$

$$N = N_1 \cdot \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k}$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Neigungsexponent der Wöhlerkurve

$$k = - \frac{\lg\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}{\lg\left(\frac{\sigma_{A1}}{\sigma_{A2}}\right)}$$

$P_1 (N_1, \sigma_{A1})$ und $P_2 (N_2, \sigma_{A2})$ sind beliebige Stützpunkte im Bereich der Zeitfestigkeit (siehe Abbildung auf Folie 13-22).

Bei *gleicher Teilung* des Abszissen- und Ordinatenmaßstabes kann der Neigungsexponent k auch aus dem Winkel α ermittelt werden.

$$k = \tan \alpha$$

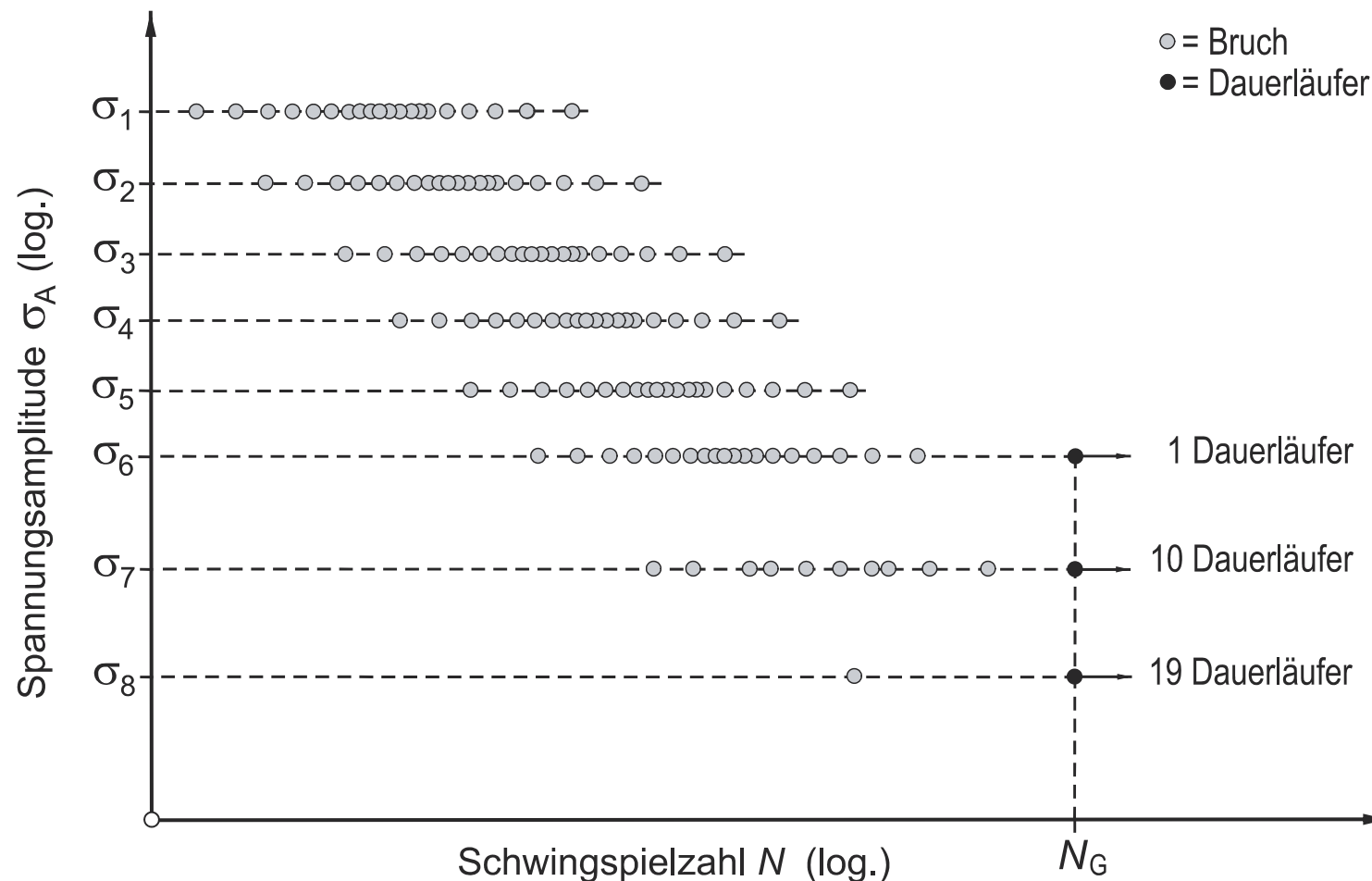
Je größer der Betrag des Neigungsexponenten k , desto flacher verläuft die Wöhlerkurve.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Statistische Auswertung von Wöhlerversuchen

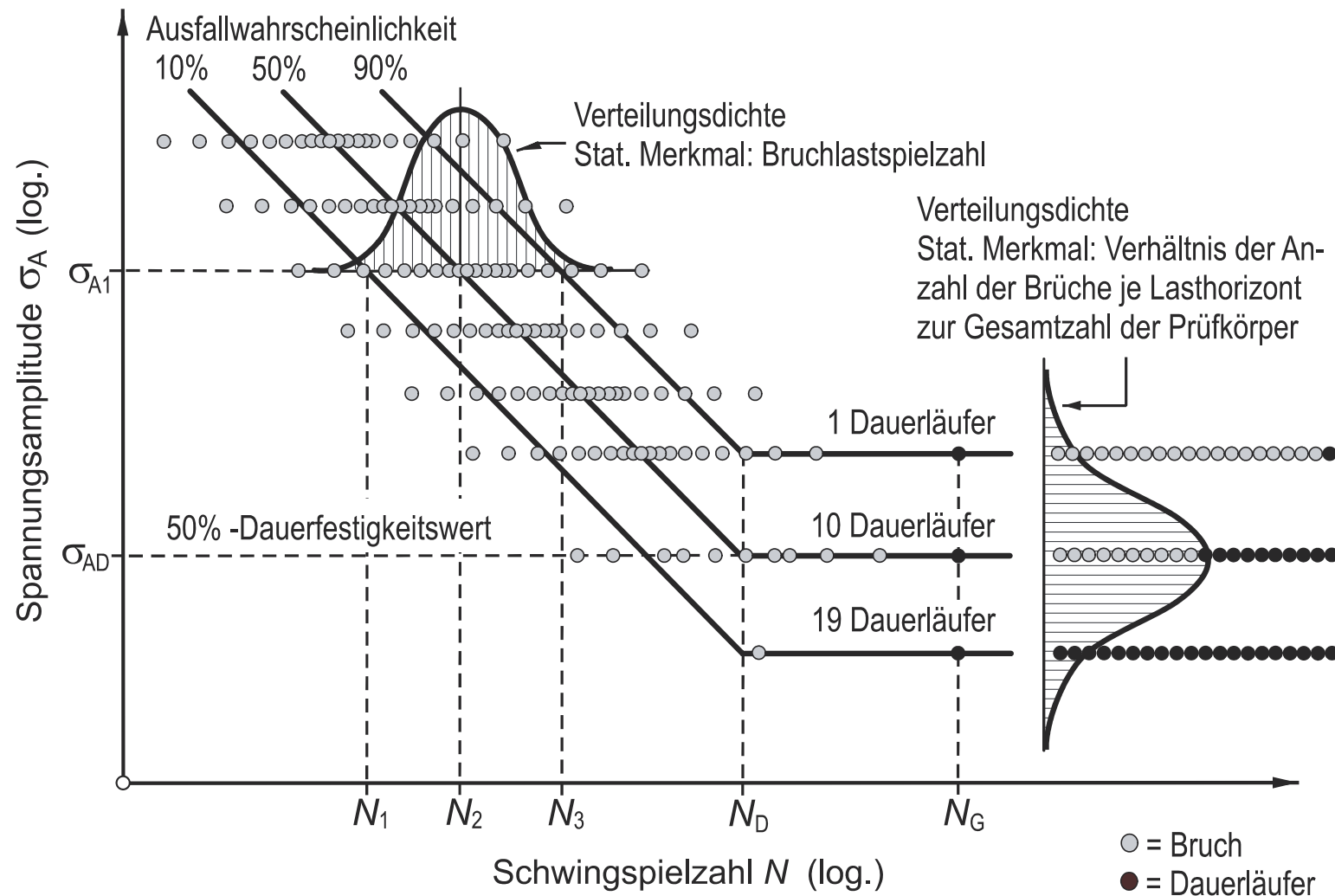
Problem: Die Ergebnisse eines Wöhlerversuchs (z. B. die Bruchschwingenspielzahl) streuen in der Regel erheblich.

Ursache: Vielfältige Einflüsse auf die Entstehung und das Wachstum von Schwingrissen.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Lösung: Es ist heute Stand der Technik, Wöhlerversuche statistisch auszuwerten und den Ergebnissen durch Angabe der Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{\bar{U}}$ (oder der Ausfallwahrscheinlichkeit $P_A = 100\% - P_{\bar{U}}$) eine größere Aussagefähigkeit zu verleihen.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Dauerfestigkeitskennwerte

Empirisch ermittelte Beziehungen zur Abschätzung von Dauerfestigkeitskennwerten unter rein wechselnder Beanspruchung (Anhaltswerte für ungekerbte Proben mit polierter Oberfläche)

Werkstoffsorte / Werkstoffgruppe	Dauerfestigkeitskennwert ¹⁾			
	Zug-Druck- Wechselfestigkeit σ_{zdW} ²⁾	Biege- wechselfestigkeit σ_{bW} ^{7) 8)}	Schub- wechselfestigkeit τ_{sW} ²⁾	Torsions- wechselfestigkeit τ_{tW} ^{7) 8) 9)}
Walzstahl, allgemein ^{3) 4)}	$0,45 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bW}$
Einsatzstahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁵⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$ ⁵⁾	$0,577 \cdot \sigma_{bW}$
Nichtrostender Stahl	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bW}$
Schmiedestahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bW}$
Stahlguss	$0,34 \cdot R_m$	$1,15 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Gusseisen mit Lamellengr.	$0,30 \cdot R_m$	$1,50 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,850 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,8 \dots 0,9 \cdot \sigma_{zdW}$
Gusseisen mit Kugelgr.	$0,34 \cdot R_m$	$1,30 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,650 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Temperguss	$0,30 \cdot R_m$	$1,40 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Knetlegierungen	$0,30 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Gusslegierungen	$0,30 \cdot R_m$	k. A.	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.

¹⁾ Werkstoffkennwerte sind in N/mm² einzusetzen.

²⁾ Werte nach FKM-Richtlinie. Für $N = 10^6$ Schwingspiele.

³⁾ Außer Einsatzstahl, nichtrostender Stahl und Schmiedestahl.

⁴⁾ Nach DIN 743-3: $\sigma_{zdW} \approx 0,4 \cdot R_m$; $\sigma_{bW} \approx 0,5 \cdot R_m$; $\tau_{tW} \approx 0,3 \cdot R_m$ (Torsionswechselfestigkeit).
k. A. = keine Angabe

⁵⁾ Blindgehärtet. Einfluss einer Einsatzhärtung wird durch den Randschichtfaktor berücksichtigt.

⁶⁾ Vorläufiger Wert.

⁷⁾ Anhaltswerte für zähe Werkstoffe nach Issler, Ruoff, Häfele.

⁸⁾ $0,577 = 1/\sqrt{3}$ (Gestaltänderungsenergiehypothese).

⁹⁾ Experimentelle Ergebnisse deuten eher auf ein Verhältnis von $\tau_{tW} = 0,62 \cdot \sigma_{bW}$ hin.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Festigkeitsnachweis

Ein Bauteil kann als dauerhaft angesehen werden, falls die (Last-)Spannungsamplitude σ_a an der höchst beanspruchten Stelle, unter Berücksichtigung eines angemessenen Sicherheitsfaktors gegen Schwingbruch (S_D), die dauernd ertragbare Spannungsamplitude (Wechselfestigkeit σ_W) nicht überschreitet.

Festigkeitsbedingung für ungekerbte Bauteile mit polierter Oberfläche unter reiner Wechselbeanspruchung

Für Normalspannungen:

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_W}{S_D}$$

- σ_a = (Last-)Spannungsamplitude
- $\sigma_{a \text{ zul}}$ = zulässige Spannungsamplitude
- σ_W = Wechselfestigkeit (z. B. Folie 13-26)
- S_D = Sicherheitsbeiwert gegen Schwingbruch ($S_D \geq 2,5$)

Für Schubspannungen:

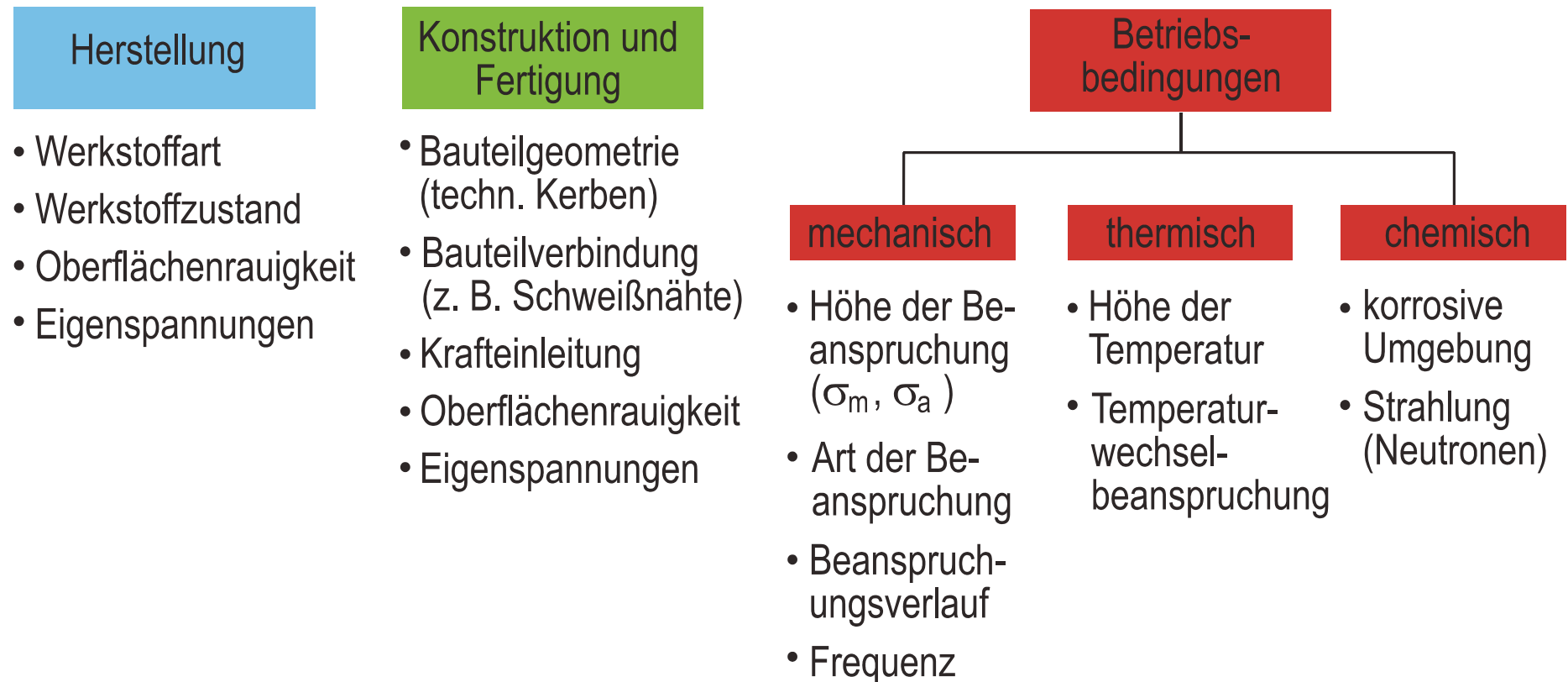
$$\tau_a \leq \tau_{a \text{ zul}} = \frac{\tau_W}{S_D}$$

- τ_a = (Last-)Spannungsamplitude
- $\tau_{a \text{ zul}}$ = zulässige Spannungsamplitude
- τ_W = Wechselfestigkeit (z. B. Folie 13-26)
- S_D = Sicherheitsbeiwert gegen Schwingbruch ($S_D \geq 2,5$)

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einflussgrößen auf die Schwingfestigkeit von Metallen

Übersicht der Einflussgrößen auf die Schwingfestigkeit

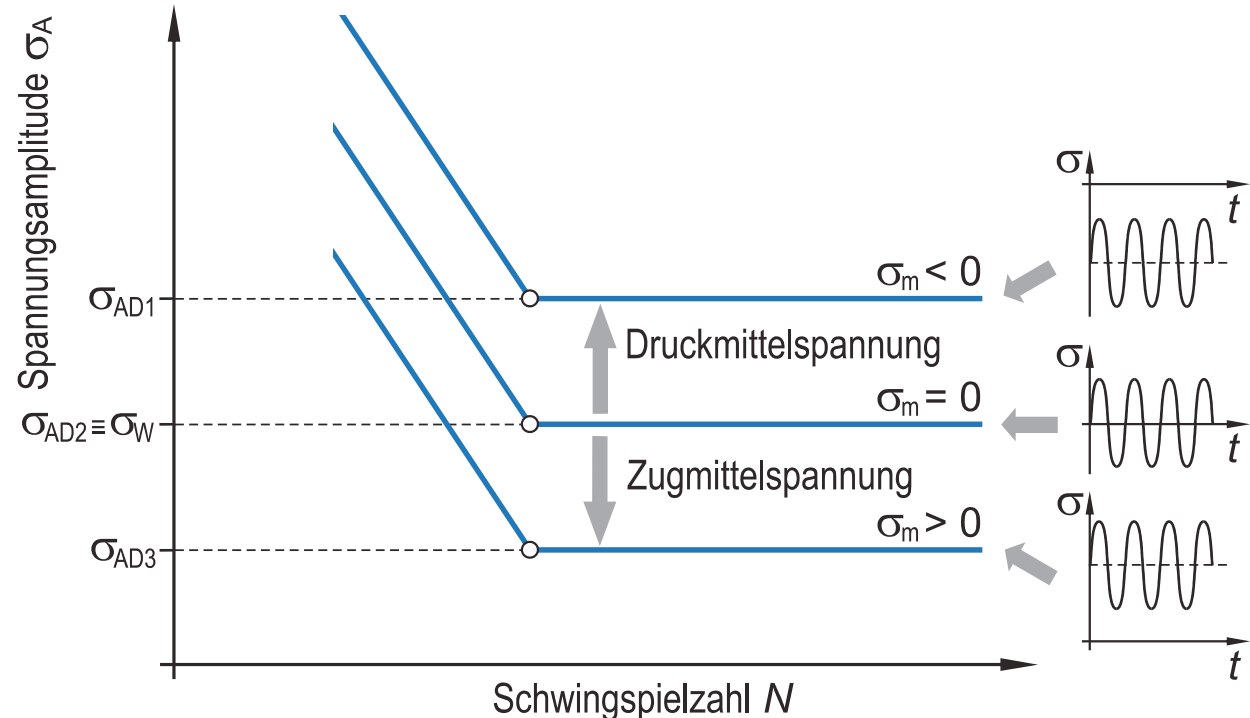


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss der Mittelspannung - Dauerfestigkeitsschaubilder

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass mit zunehmender (Zug-)Mittelspannung (σ_m) die ertragbare Amplitude (σ_{AD}) abnimmt, da die zu einem Ermüdungsbruch führenden plastischen Verformungen durch Zugspannungen begünstigt werden. Druckmittelspannungen bewirken einen umgekehrten Effekt.

Der Einfluss der Mittelspannung auf die ertragbare Amplitude wird üblicherweise durch **Dauerfestigkeitsschaubilder** erfasst.

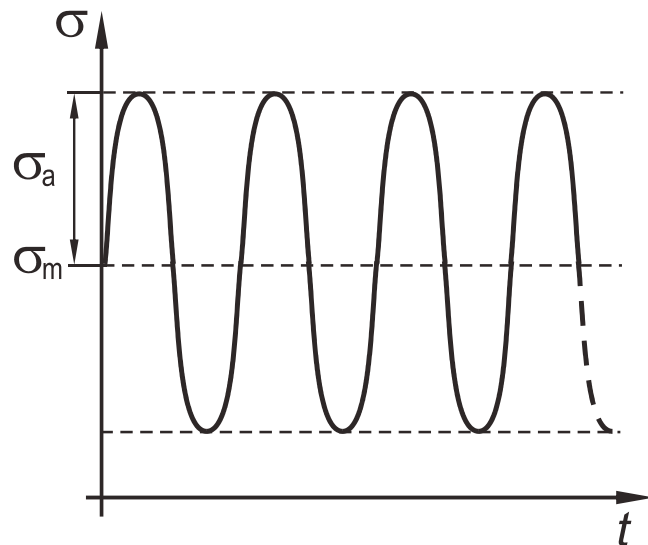


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Man unterscheidet im Wesentlichen die folgenden Dauerfestigkeitsschaubilder bzw. Darstellungen:

- nach Smith
- nach Haigh
- neuere Vorschläge für Dauerfestigkeitsschaubilder (z. B. nach FKM-Richtlinie)
- nach Gerber, Goodman, Kommerell
- nach Moore, Kommers, Jasper, Pohl

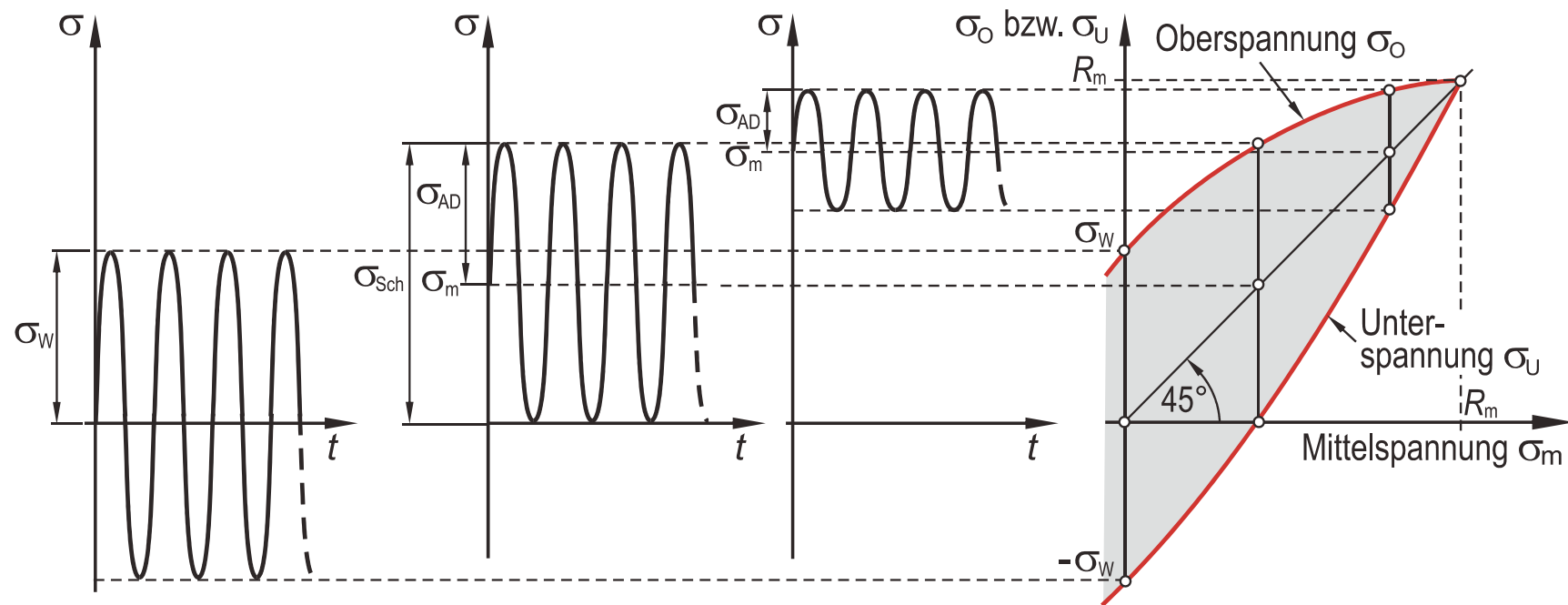
Vorraussetzung für die Anwendung von Dauerfestigkeitsschaubildern ist die Trennung der Schwingbeanspruchung in eine Mittelspannung (σ_m) und eine Spannungsamplitude (σ_a).



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith

Bei der Darstellung nach *Smith* wird auf der Abszisse die Mittelspannung σ_m aufgetragen und auf der Ordinate im gleichen Achsenmaßstab die dauernd ertragbare Oberspannung σ_o bzw. Unter-
spannung σ_u . Diese Darstellungsart ist im konstruktiven Maschinenbau weit verbreitet.



σ_{AD} dauernd ertragbare Spannungsamplitude
(Dauerfestigkeit)

σ_m Mittelspannung

σ_o dauernd ertragbare Oberspannung

σ_u dauernd ertragbare Unterspannung

σ_W Wechselfestigkeit

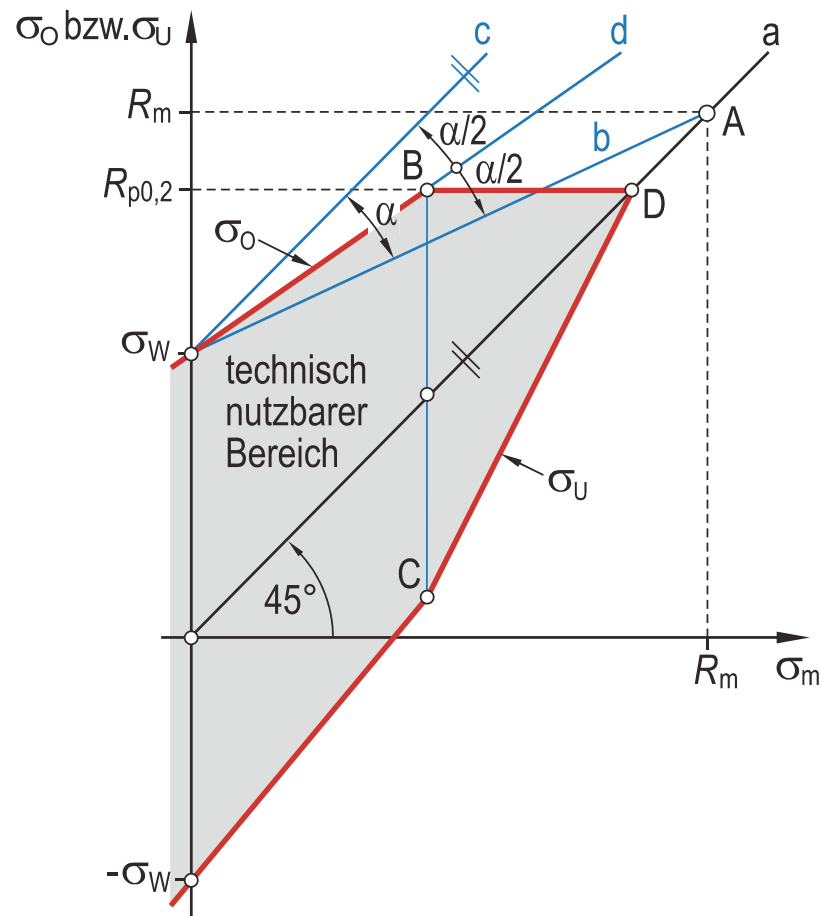
σ_{Sch} Schwellfestigkeit

Vorteil der Darstellung nach Smith: Direkte Zuordnung des Beanspruchungsniveaus.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Näherungskonstruktion für das Dauerfestigkeitschaubild nach Smith für duktile Werkstoffe

Linearisierte und durch die Dehngrenze begrenzte Auftragung für die konstruktive Auslegung.

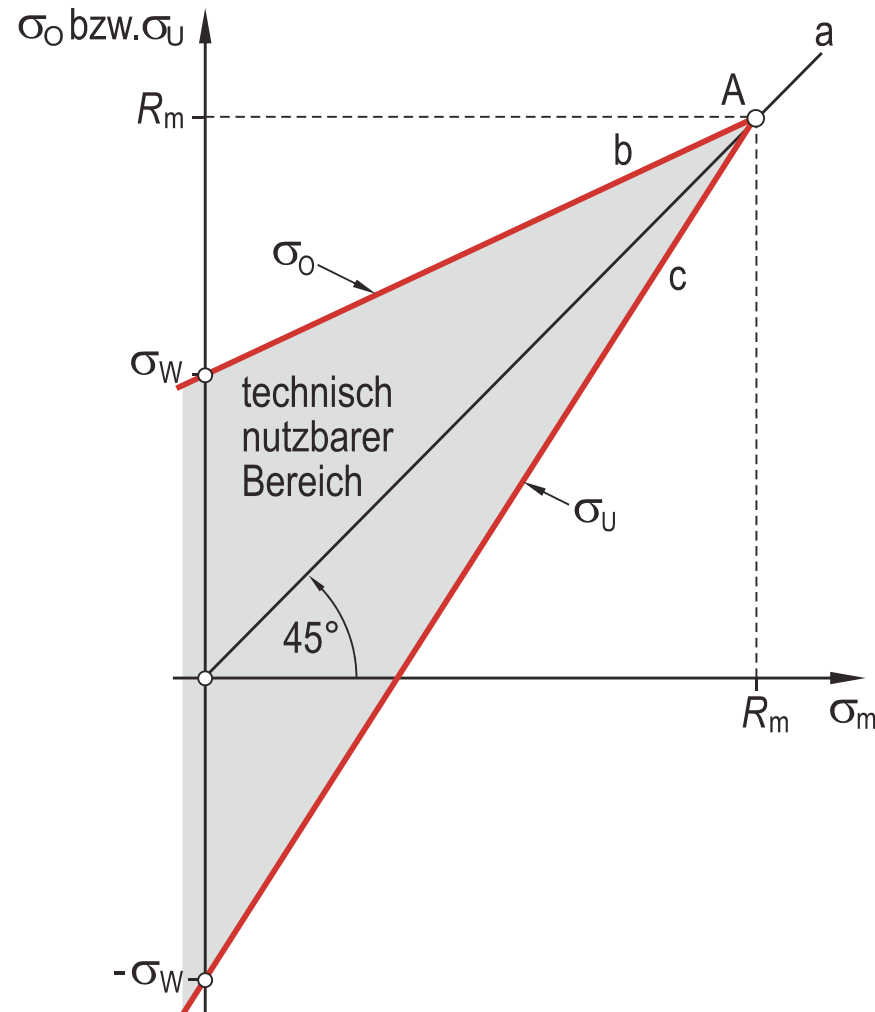


Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichnen eines σ - σ_m -Koordinatensystems und Einzeichnen der ersten Winkelhalbierenden (Gerade a).
2. Einzeichnen der Wechselfestigkeit (σ_W bzw. $-\sigma_W$).
3. Einzeichnen der Verbindungsgeraden (Gerade b) zwischen σ_W und dem Schnittpunkt einer Parallelen zur Abszisse durch R_m mit der Linie a (Schnittpunkt A).
4. Konstruktion einer Parallelen zur Geraden a durch σ_W (Gerade c).
5. Konstruktion der Winkelhalbierenden zum Winkel α (Gerade d).
6. Gerade d schneidet Parallele zur Abszisse durch $R_{p0,2}$ im Punkt B .
7. Spiegelung des Punktes B an der Geraden a ergibt den Punkt C .
8. Linienzug $\sigma_W - B - D - C - \sigma_W$ ist die gesuchte Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für duktile Werkstoffe.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Näherungskonstruktion für das Dauerfestigkeitschaubild nach Smith für spröde Werkstoffe



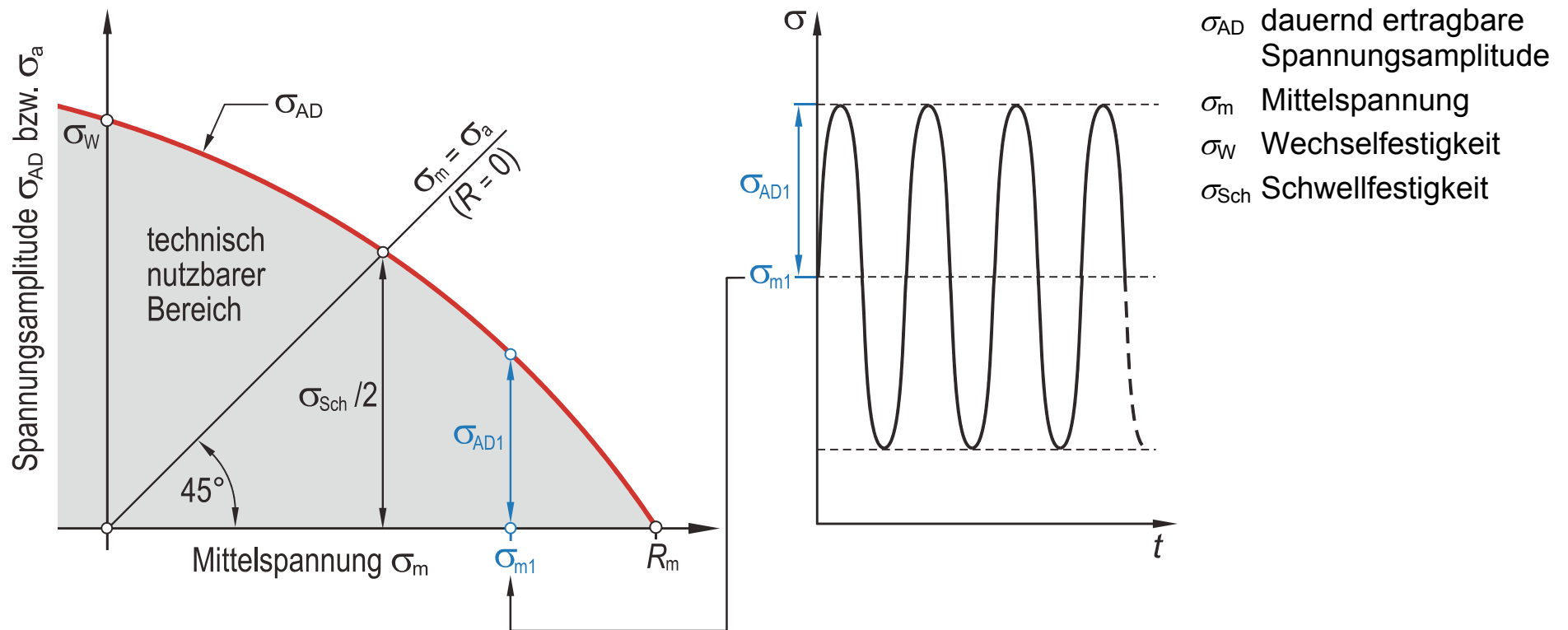
Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichnen eines σ - σ_m -Koordinatensystems und Einzeichnen der ersten Winkelhalbierenden (Gerade a).
2. Einzeichnen der Wechselfestigkeit (σ_W bzw. $-\sigma_W$).
3. Einzeichnen der Verbindungsgeraden (Gerade b) zwischen σ_W und dem Schnittpunkt einer Parallelen zur Abszisse durch R_m mit der Linie a (Schnittpunkt A).
4. Verbinden des Schnittpunktes A mit der Wechselfestigkeit $-\sigma_W$ (Gerade c).
5. Linienzug $\sigma_W - A - -\sigma_W$ ist die gesuchte Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für spröde Werkstoffe.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh

Trägt man für unterschiedliche Mittelspannungen die jeweils zugehörigen, dauernd ertragbaren Spannungsamplituden σ_{AD} über der entsprechenden Mittelspannung σ_m auf, dann erhält man das Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh.



Die Darstellung nach Haigh bietet die Möglichkeit zur analytischen Formulierung der Grenzkurve.

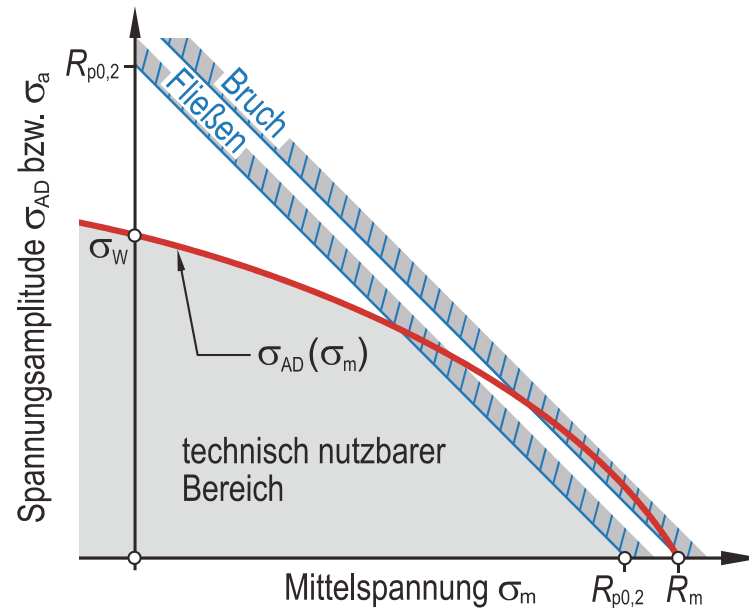
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Näherungskonstruktionen für das Dauerfestigkeitschaubild nach Haigh

Wirkung von Normalspannungen

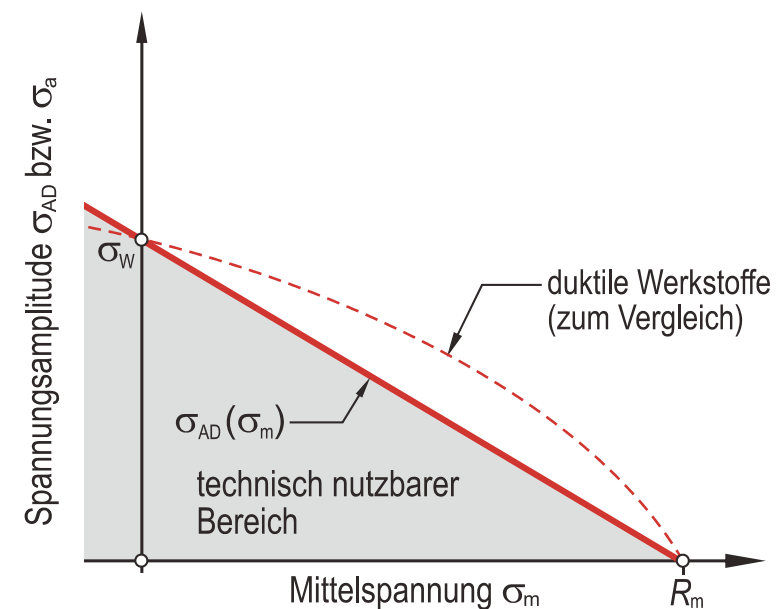
Duktile Werkstoffe

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$$



Spröde Werkstoffe

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$$



Grenzkurven im DFS nach Haigh

Plastische Verformung

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_{p0,2} - \sigma_m$$

Bruch

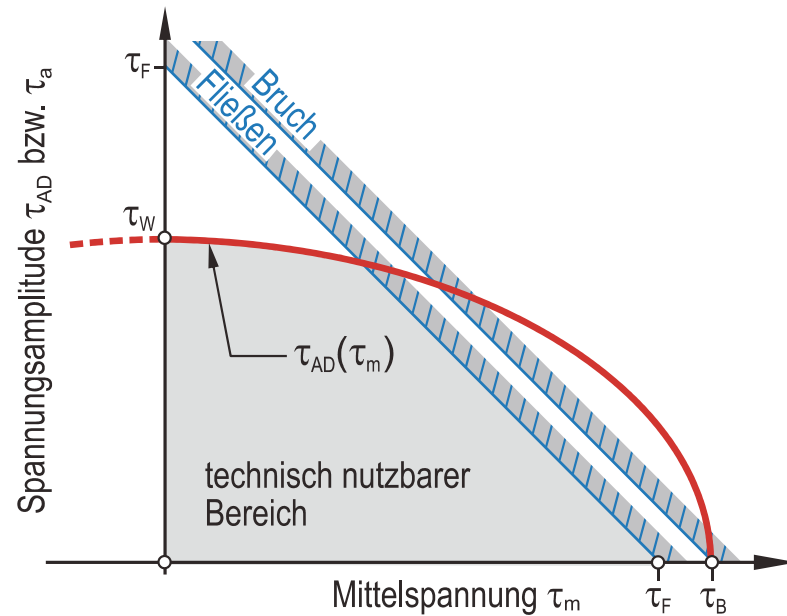
$$\sigma_a(\sigma_m) = R_m - \sigma_m$$

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Wirkung von Schubspannungen

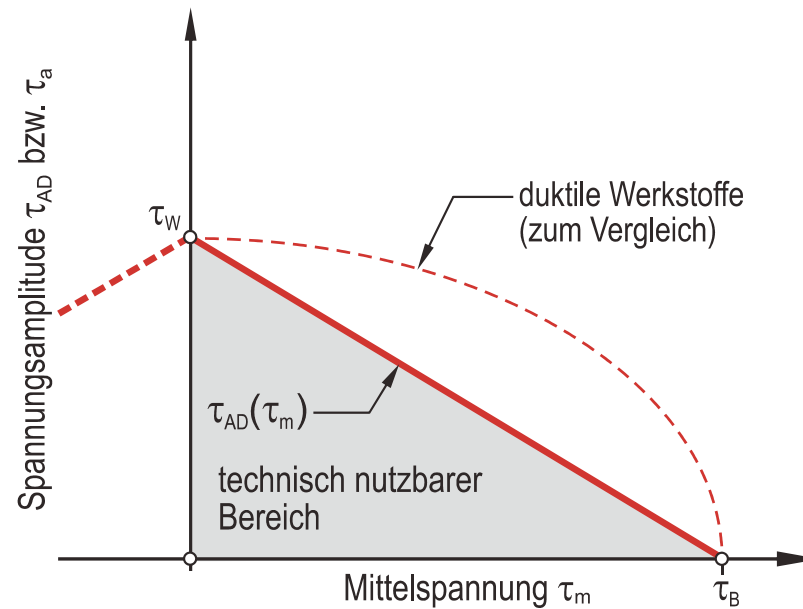
Duktile Werkstoffe

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{\tau_B} \right)^2}$$



Spröde Werkstoffe

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \left(1 - \frac{|\tau_m|}{\tau_B} \right)$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

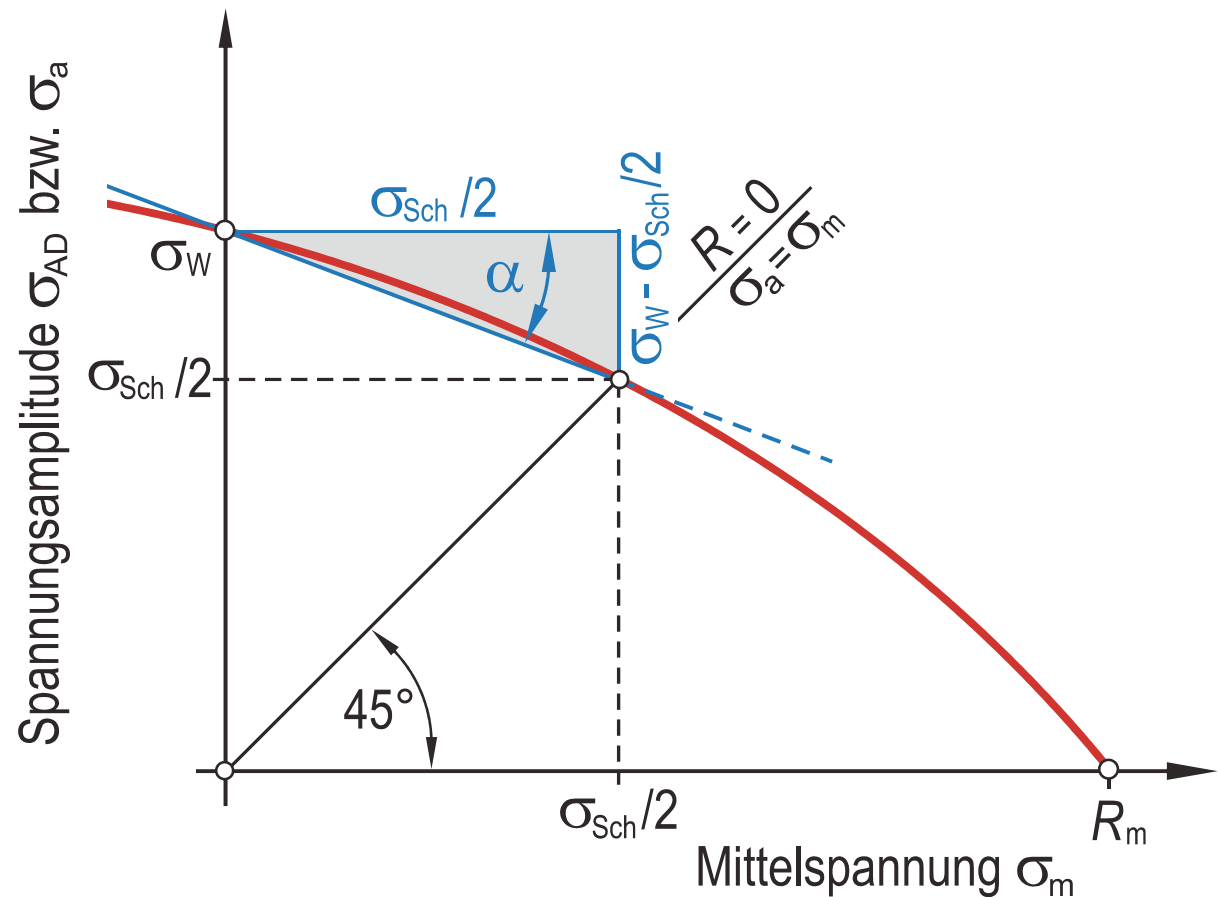
Mittelspannungsempfindlichkeit

Zur Kennzeichnung des Einflusses der Mittelspannung auf die dauernd ertragbare Spannungsamplitude wird die **Mittelspannungsempfindlichkeit M** eingeführt.

Definition der Mittelspannungsempfindlichkeit

$$M = \tan \alpha = \frac{\sigma_W - \sigma_{Sch}/2}{\sigma_{Sch}/2}$$

Die Gleichung gilt in analoger Weise für die Wirkung von Schubspannungen, falls die Normalspannung σ durch die Schubspannung τ ersetzt wird.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Rechnische Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit

Wirkung von Normalspannungen:

- Stahl: ¹⁾ $M_{\sigma} = 0,00035 \cdot R_m - 0,10$
- Stahlguss: $M_{\sigma} = 0,00035 \cdot R_m + 0,05$
- GJL: ²⁾ $M_{\sigma} = 0,5$
- GJS: ³⁾ $M_{\sigma} = 0,00035 \cdot R_m + 0,08$
- Temperguss: $M_{\sigma} = 0,00035 \cdot R_m + 0,13$
- Al-Knetlegierungen: $M_{\sigma} = 0,001 \cdot R_m - 0,04$
- Al-Gusslegierungen: $M_{\sigma} = 0,001 \cdot R_m + 0,20$

Wirkung von Schubspannungen:

- Stahl: ¹⁾ $M_{\tau} = 0,577 \cdot M_{\sigma}$
- Stahlguss: $M_{\tau} = 0,577 \cdot M_{\sigma}$
- GJL: ²⁾ $M_{\tau} = 0,850 \cdot M_{\sigma}$
- GJS: ³⁾ $M_{\tau} = 0,650 \cdot M_{\sigma}$
- Temperguss: $M_{\tau} = 0,750 \cdot M_{\sigma}$
- Al-Knetlegierungen: $M_{\tau} = 0,577 \cdot M_{\sigma}$
- Al-Gusslegierungen: $M_{\tau} = 0,750 \cdot M_{\sigma}$

¹⁾ auch für nichtrostende Stähle

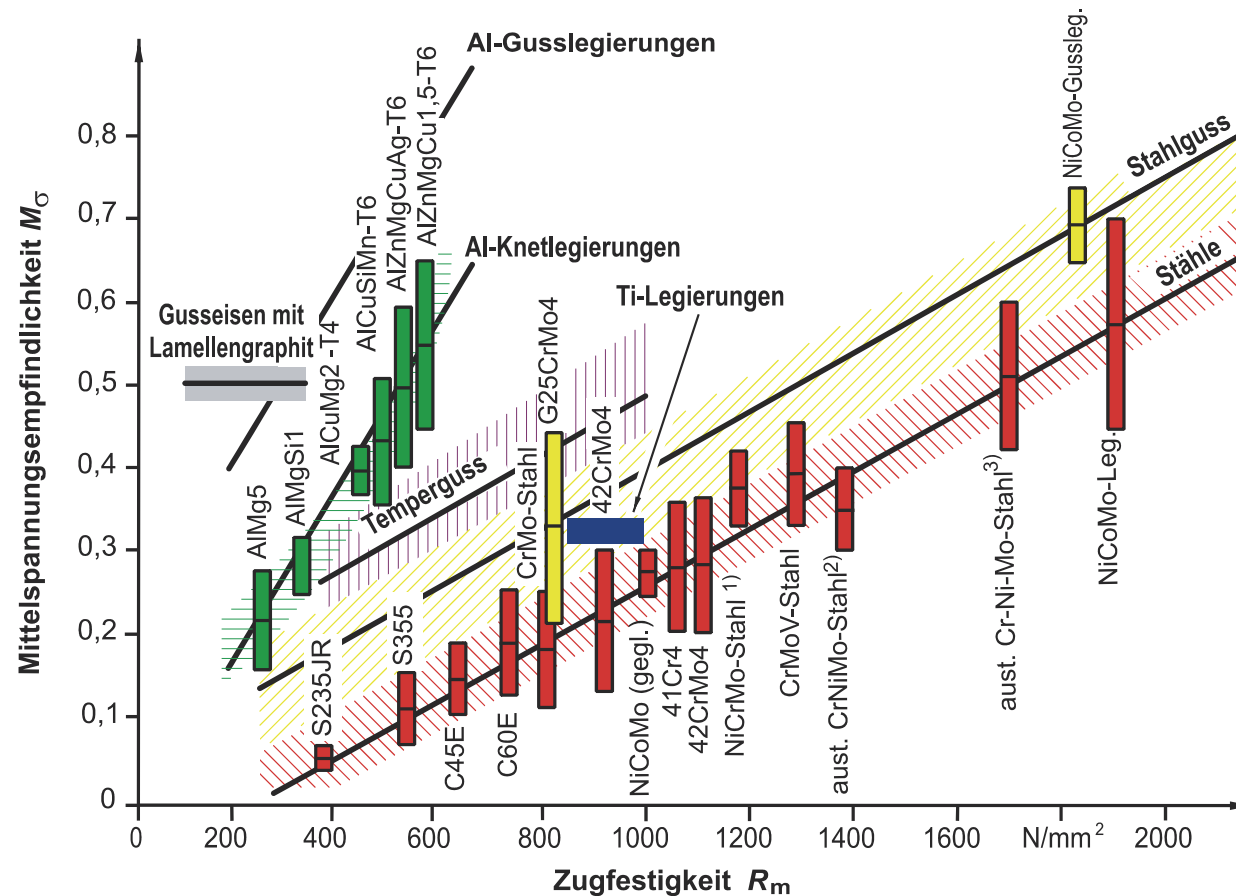
²⁾ GJL: Gusseisen mit Lamellengraphit

³⁾ GJS: Gusseisen mit Kugelgraphit

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Graphische Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit

Wirkung von Normalspannungen:



1) etwa 0,3% C, 2% Cr, 2% Ni, 0,4% Mo

2) 15% Cr, 7% Ni, 2,2% Mo

3) 15,5% Cr, 4,25% Ni, 2,75% Mo

T4 = kalt ausgehärtete Al-Legierung

T6 = warm ausgehärtete Al-Legierung

Streubereich für:

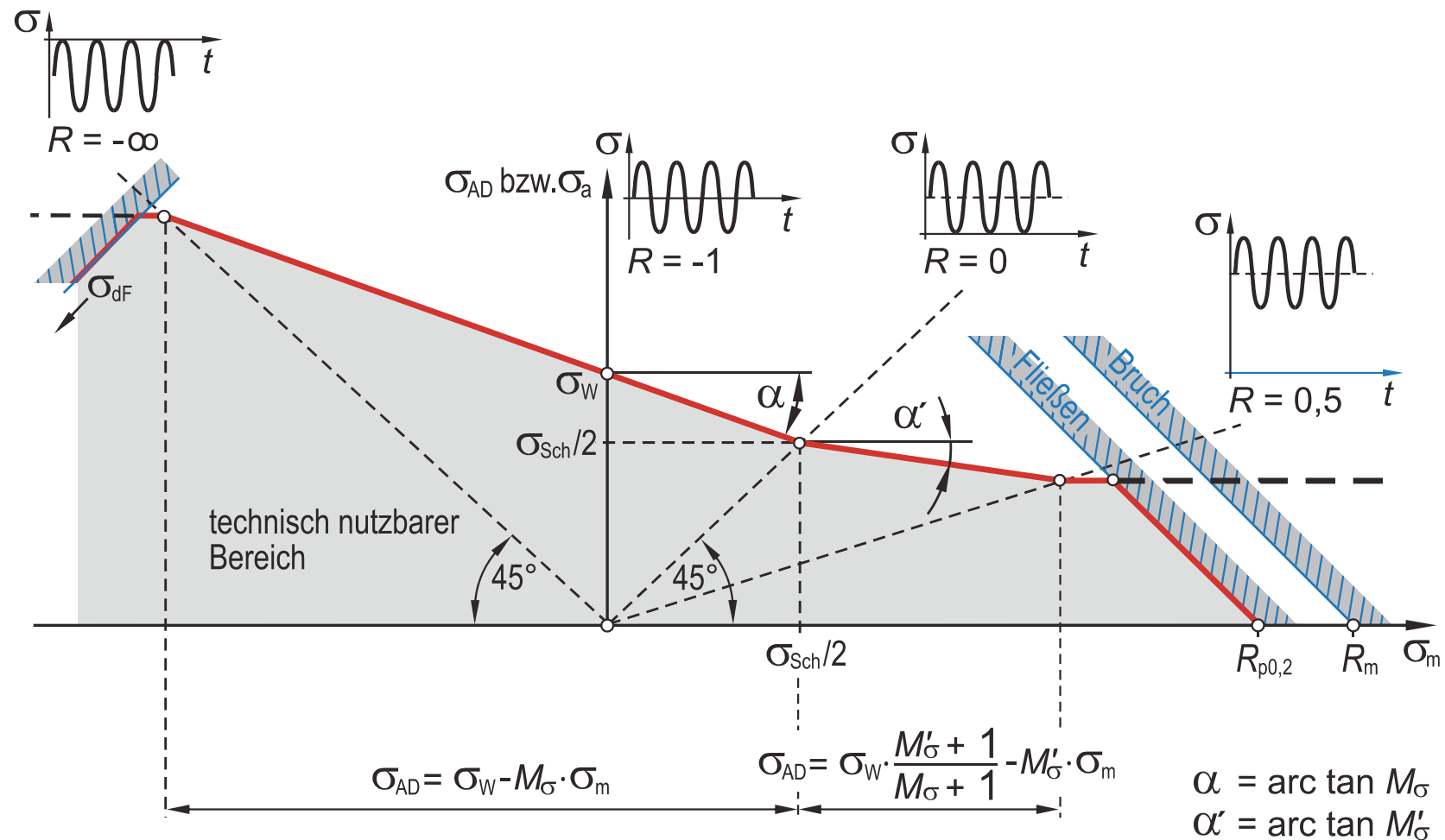
- gekerbte Flachstäbe ($\alpha_k = 1,0 \dots 5,0$)
- axiale Beanspruchung
- $N_D = 10^4 \dots 10^6$ ($P_A = 50\%$)

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Neue Vorschläge für ein Dauerfestigkeitsschaubild für duktile Stähle

Das Dauerfestigkeitsschaubild in der Darstellung nach Haigh wurde für *duktilen Stähle* zwischenzeitlich weiterentwickelt.

Wirkung von Normalspannungen:



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Für $\frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1} \leq \sigma_m \leq \frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1}$:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

Für $\frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1} < \sigma_m \leq \frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_m$$

Für $\frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} < \sigma_m < \infty$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

Für $-\infty < \sigma_m < \frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1}$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{1 - M_\sigma}$$

Das Diagramm illustriert die Beanspruchung bei Drehmoment und Schubkraft. Es zeigt die Schubspannung τ auf der vertikalen Achse und die Schubkraft τ_m auf der horizontalen Achse. Eine rote Linie stellt die Beanspruchung dar, die von einem Punkt bei τ_w auf der τ -Achse beginnt und über einen Punkt bei $\tau_{Sch}/2$ auf der τ -Achse verläuft. Der Winkel α ist zwischen der roten Linie und der 45°-Linie eingezeichnet. Ein grauer Bereich ist als "technisch nutzbarer Bereich" gekennzeichnet. Zwei weitere Diagramme oben zeigen die zeitliche Entwicklung der Beanspruchung für $R = -1$ und $R = 0$. Ein drittes Diagramm rechts zeigt die Beanspruchung für $R = 0,5$. Die x-Achse ist mit τ_F und τ_B markiert. Formeln für τ_{AD} sind unten angegeben:

$$\tau_{AD} = \tau_w - M_\tau \cdot \tau_m$$

$$\tau_{AD} = \tau_w \cdot \frac{M'_\tau + 1}{M_\tau + 1} - M'_\tau \cdot \tau_m$$

Die Winkel sind definiert als:

$$\alpha = \arctan M_\tau$$

$$\alpha^* = \arctan M'_\tau$$

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berücksichtigung der Mittelspannung im Festigkeitsnachweis

Festigkeitsbedingung unter Schwingbeanspruchung ungekerbter Bauteile mit polierter Oberfläche unter der Wirkung einer von Null verschiedenen Mittelspannung

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D}$$

σ_a = (Last-)Spannungsamplitude

$\sigma_{a \text{ zul}}$ = zulässige Spannungsamplitude

σ_{AD} = dauernd ertragbare (Normal-)Spannungsamplitude (ermittelt mit Hilfe eines geeigneten DFS)

S_D = Sicherheitsbeiwert gegen Schwingbruch ($S_D \geq 2,5$)

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss der Oberflächenrauigkeit

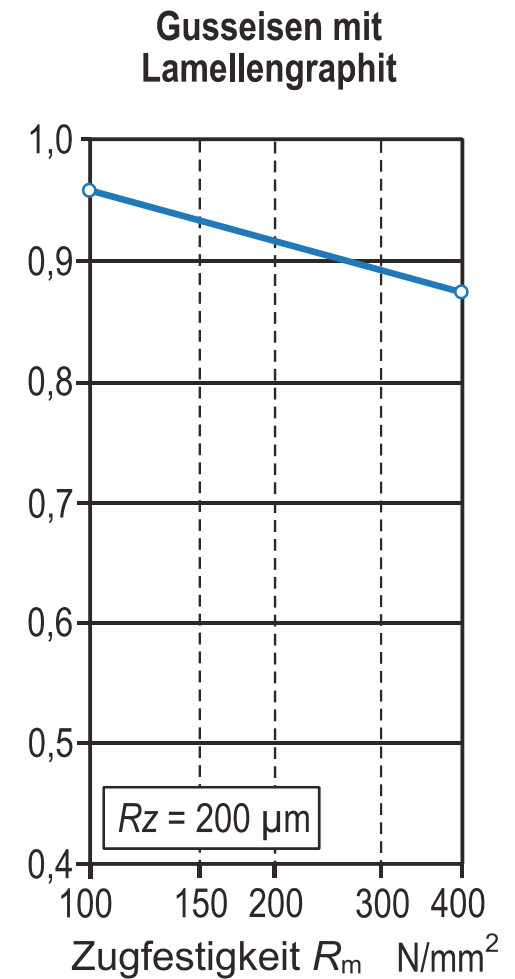
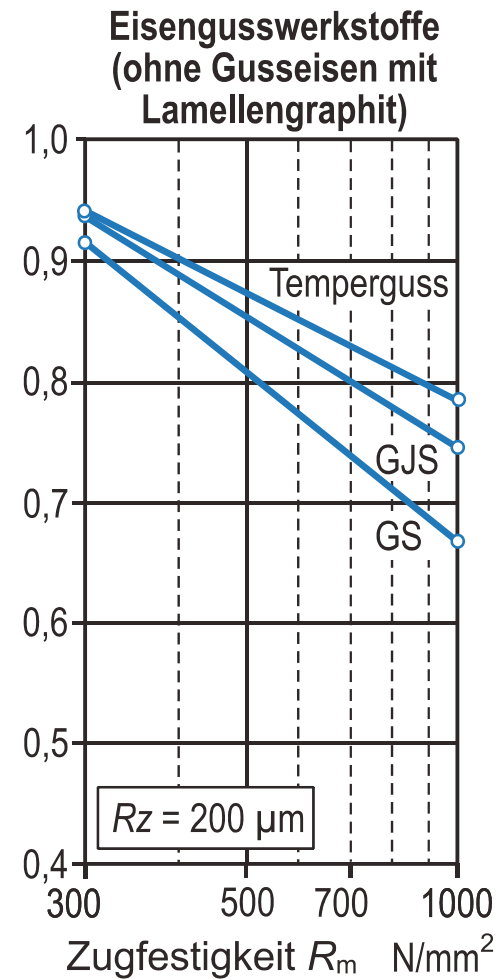
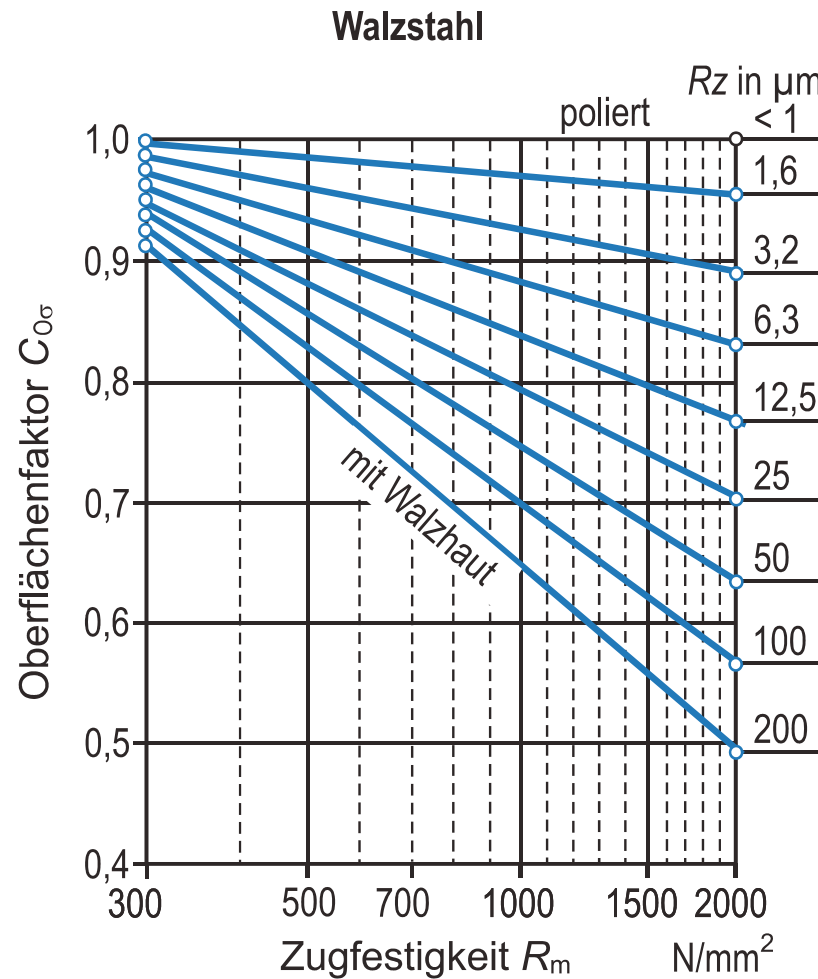
Die Oberflächenrauigkeit hat einen signifikanten Einfluss auf die Schwingfestigkeit, da Schwingrisse in der Regel an der Bauteiloberfläche entstehen. Die Oberflächenrauigkeit bewirkt eine lokale Kerbwirkung (**Mikrokerbwirkung**), überhöht dadurch die Spannung und begünstigt somit einen Schwingriss.

Mit zunehmender Festigkeit eines Werkstoffs nimmt in der Regel seine Zähigkeit ab und damit seine Kerbempfindlichkeit zu. Dies gilt nicht nur für konstruktive Kerben (Formkerben) sondern auch für die Oberflächenrauigkeit (Mikrokerben). Der Oberflächenfaktor C_O ist dementsprechend abhängig von der Oberflächenrauigkeit und der (Zug-)Festigkeit.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Wirkung von Normalspannungen

Rauheitsfaktor für Eisenwerkstoffe unter der Wirkung von Normalspannungen



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Rauheitsfaktor für Aluminium*knet*legierungen unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 1 - 0,22 \cdot \lg Rz \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right)$$

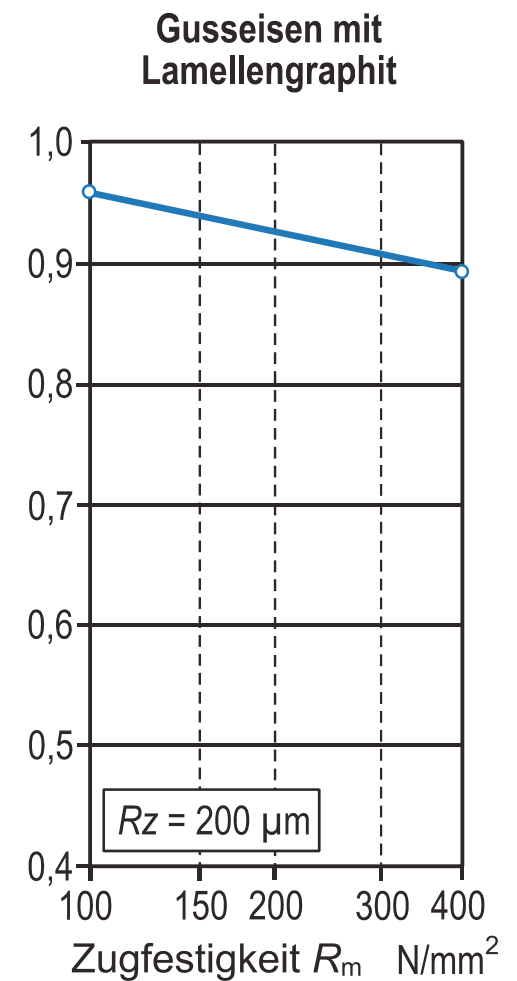
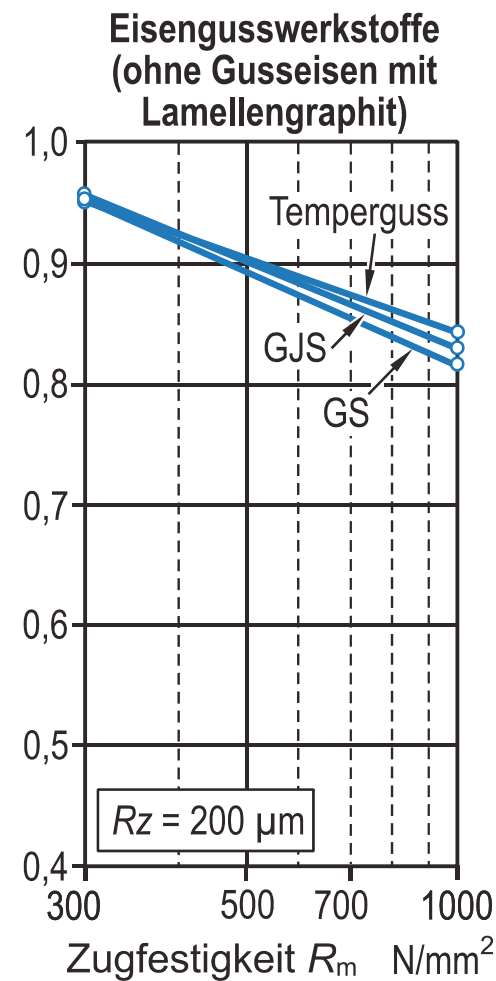
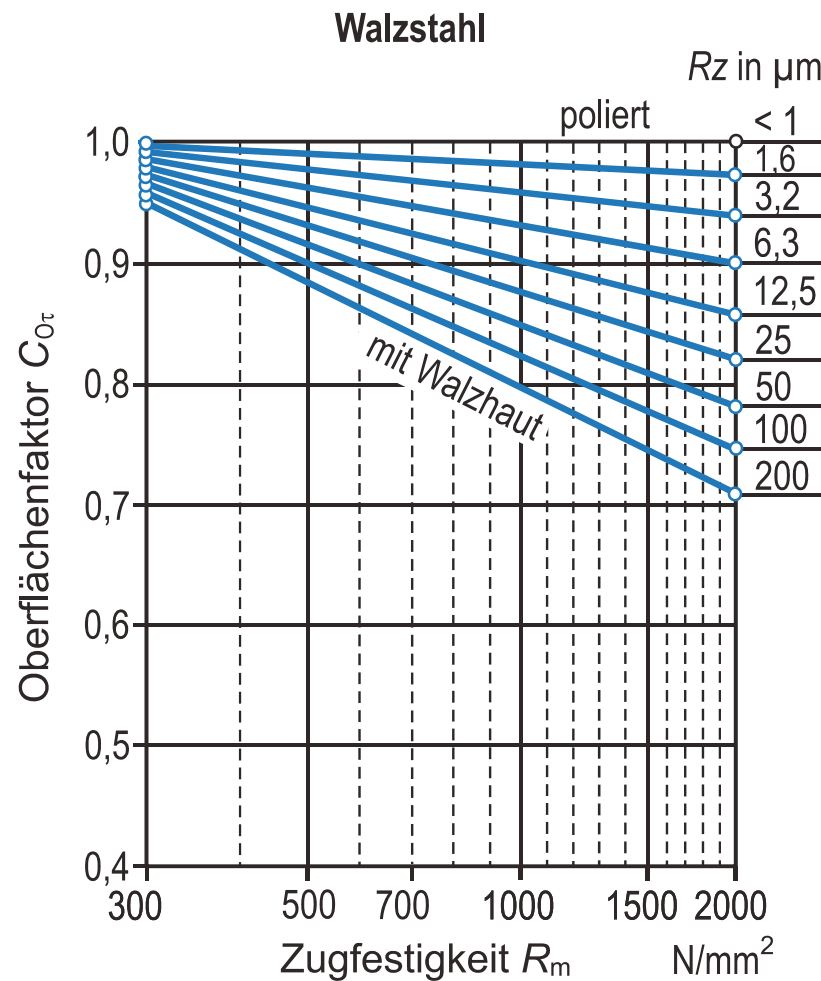
Rauheitsfaktor für Aluminium*guss*legierungen unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 1 - 0,20 \cdot \lg Rz \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right)$$

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Wirkung von Schubspannungen

Rauheitsfaktor für Eisenwerkstoffe unter der Wirkung von Schubspannungen



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Rauheitsfaktor für Aluminium*knet*legierungen unter der Wirkung von Schubspannungen

$$C_{O\tau} = 1 - 0,127 \cdot \lg Rz \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right)$$

Rauheitsfaktor für Aluminium*guss*legierungen unter der Wirkung von Schubspannungen

$$C_{O\tau} = 1 - 0,150 \cdot \lg Rz \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right)$$

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berücksichtigung des Oberflächeneinflusses im Festigkeitsnachweis

Unter der Wirkung von Normal- bzw. Schubspannungen wird die Wechselfestigkeit σ_W bzw. τ_W mit dem Größßenfaktor $C_{O\sigma}$ bzw. $C_{O\tau}$ multipliziert und somit die **korrigierte Wechselfestigkeit** σ_W^* bzw. τ_W^* berechnet.

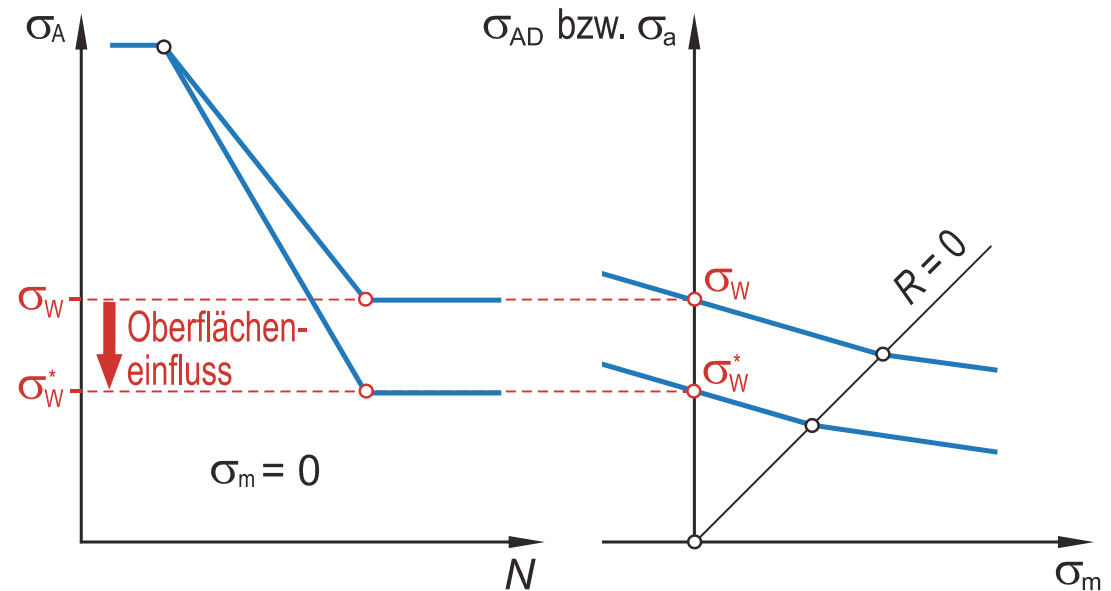
Korrigierte Zug-Druck- bzw. Biege-wechselfestigkeit

$$\sigma_W^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_W$$

Korrigierte Schubwechselfestigkeit

$$\tau_W^* = C_{O\tau} \cdot \tau_W$$

Die korrigierte Wechselfestigkeit σ_W^* bzw. τ_W^* wird in den entsprechenden Gleichung für den Festigkeitsnachweis (Folie 13-27 bzw. Folie 13-43) anstelle der Wechselfestigkeit σ_W bzw. τ_W eingesetzt.



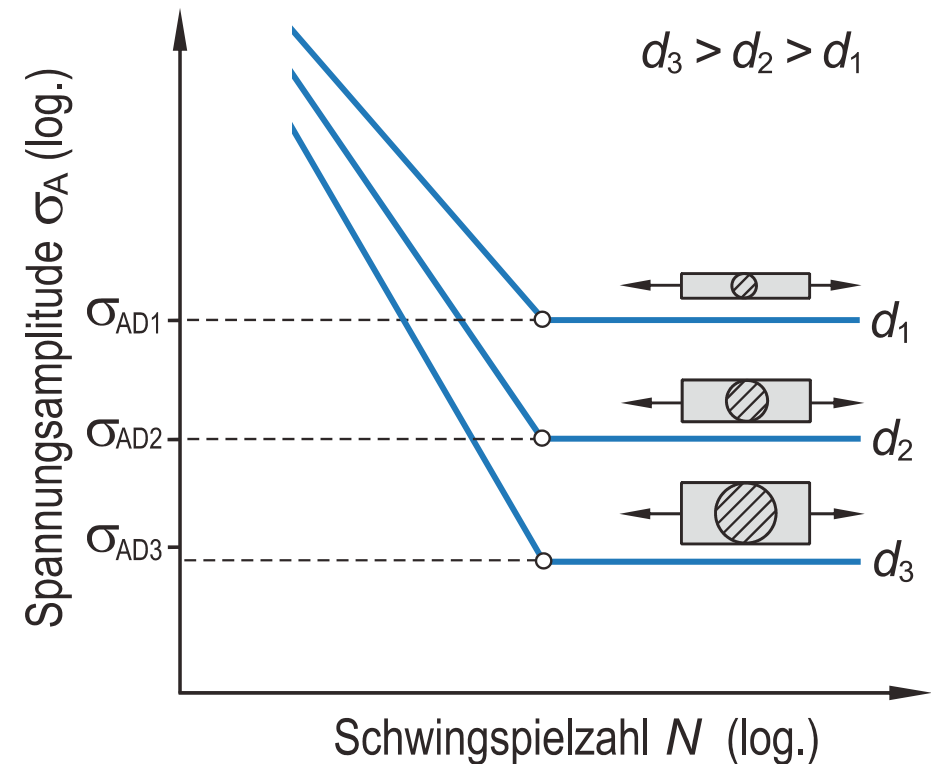
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss der Proben- bzw. Bauteilgröße - Größeneinfluss

Ergebnisse aus Schwingfestigkeitsversuchen die an geometrisch ähnlichen, jedoch unterschiedlich großen Proben bzw. Bauteilen ermittelt werden, stimmen in der Regel nicht überein.

Man beobachtet, dass sich die Schwingfestigkeit mit zunehmender Bauteilgröße verschlechtert. Hierfür gibt es im Wesentlichen drei Ursachen:

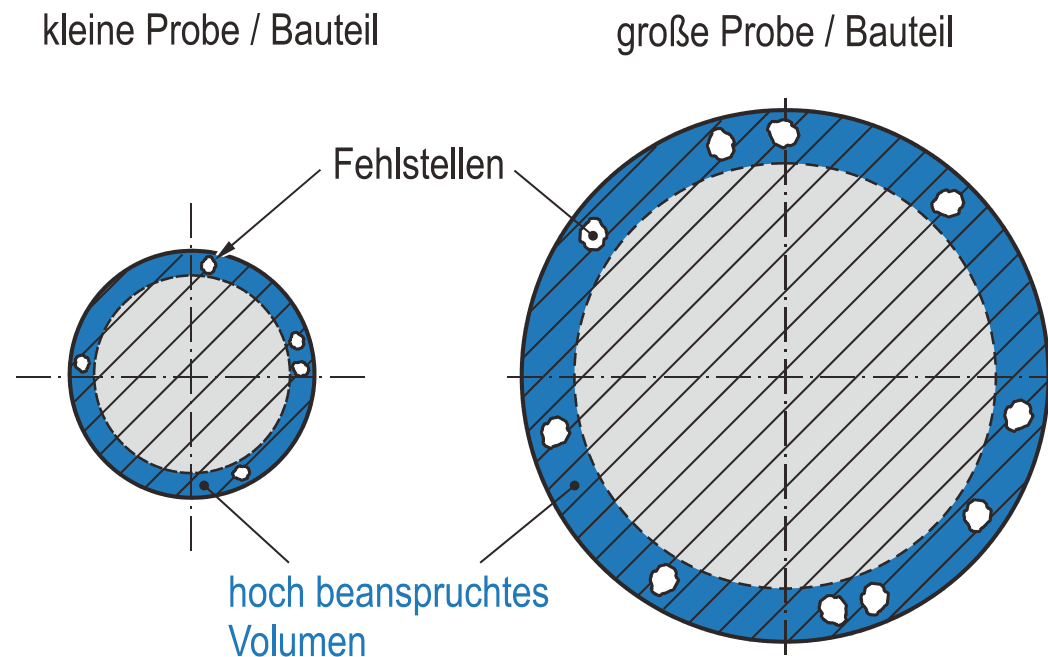
- Statistischer Größeneinfluss
- Technologischer Größeneinfluss
- Spannungsmechanischer (geometrischer) Größeneinfluss



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Statistischer Größeneinfluss

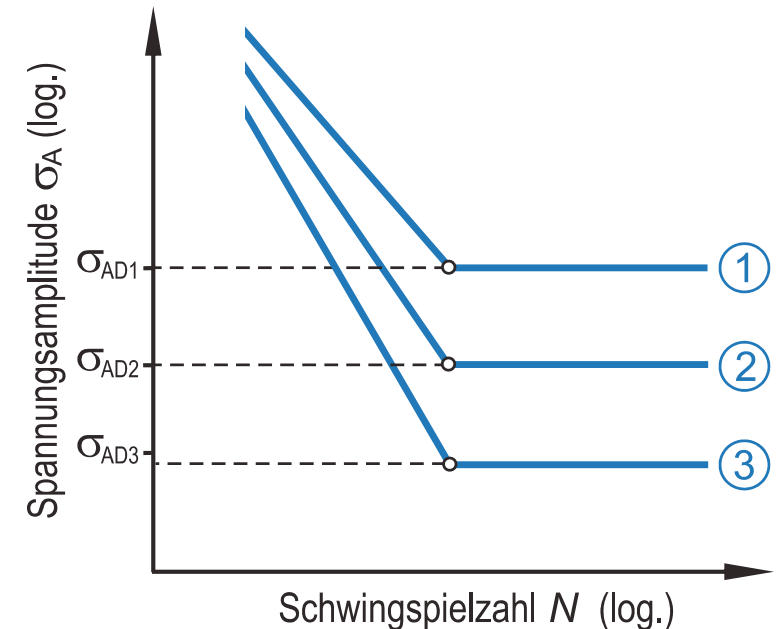
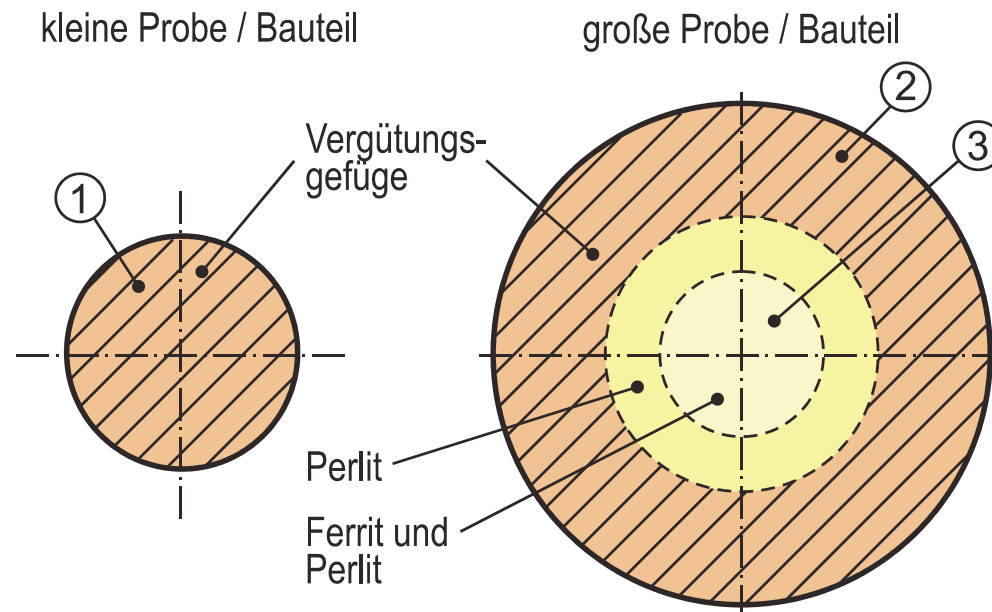
Mit zunehmender Proben- bzw. Bauteilgröße nimmt auch die Oberfläche bzw. das Volumen zu. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Schwingbruch auslösenden Fehlstelle im oberflächennahen, hoch beanspruchten Werkstoffvolumen.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Technologischer Größeneinfluss

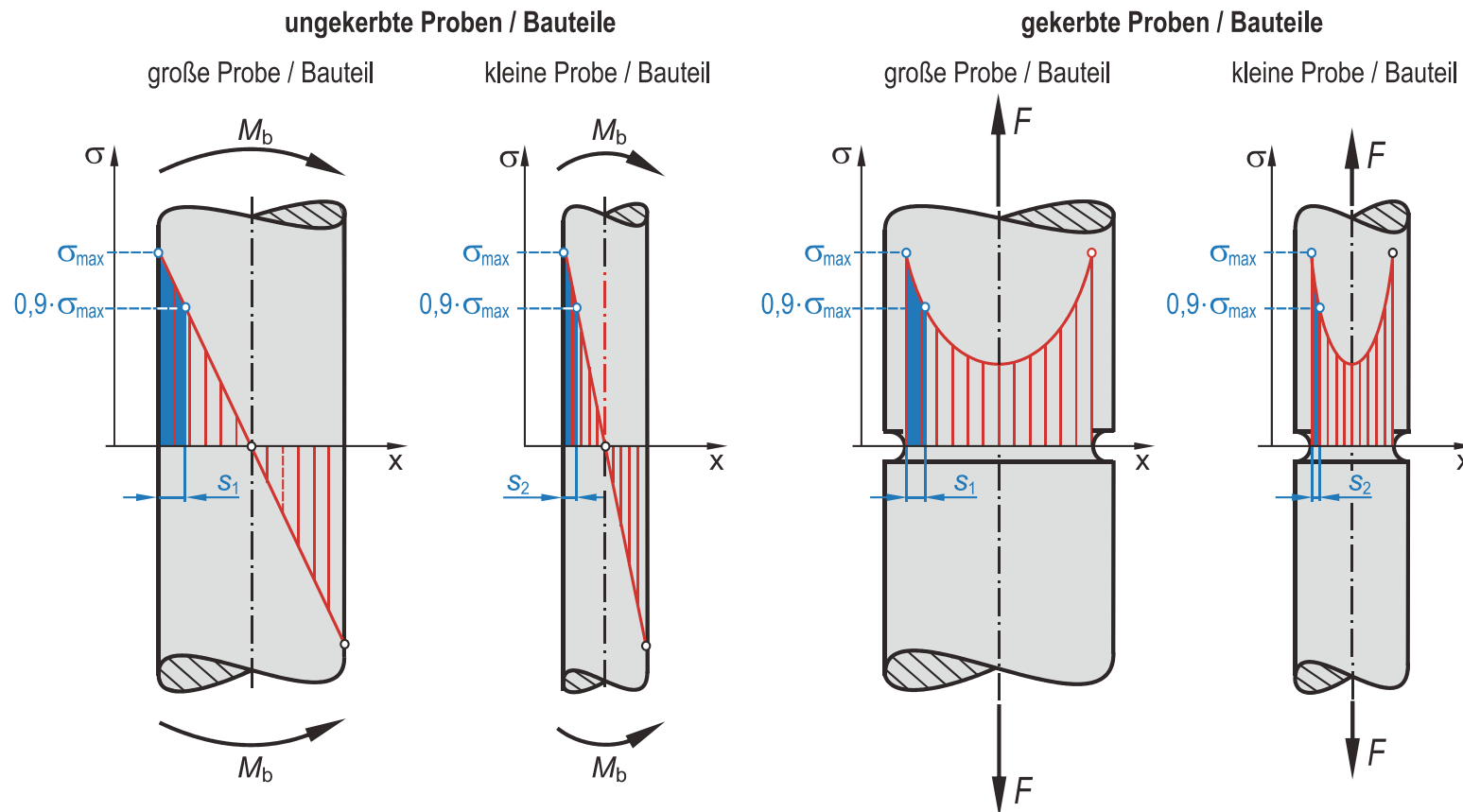
Die Herstellungstechnologie großer bzw. dickwandiger Bauteile, beispielsweise durch Gießen, Umformen oder Wärmebehandeln, unterscheidet sich in der Regel von der Herstellung kleiner bzw. dünnwandiger Bauteile. So erhält man beispielsweise beim Vergüten dünnwandiger Proben bzw. Bauteile ein Vergütungsgefüge über die gesamte Querschnittsfläche, während sich bei dickwandigen Proben bzw. Bauteilen zum Kern hin ein Gefüge mit geringerer Festigkeit (Perlit, Ferrit) ausbildet. Dementsprechend zeigen kleine Proben bzw. Bauteile eine höhere Festigkeit und somit auch ein günstigeres Schwingfestigkeitsverhalten im Vergleich zu Proben aus der Rand- oder Kernzone dickwandiger Bauteile



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

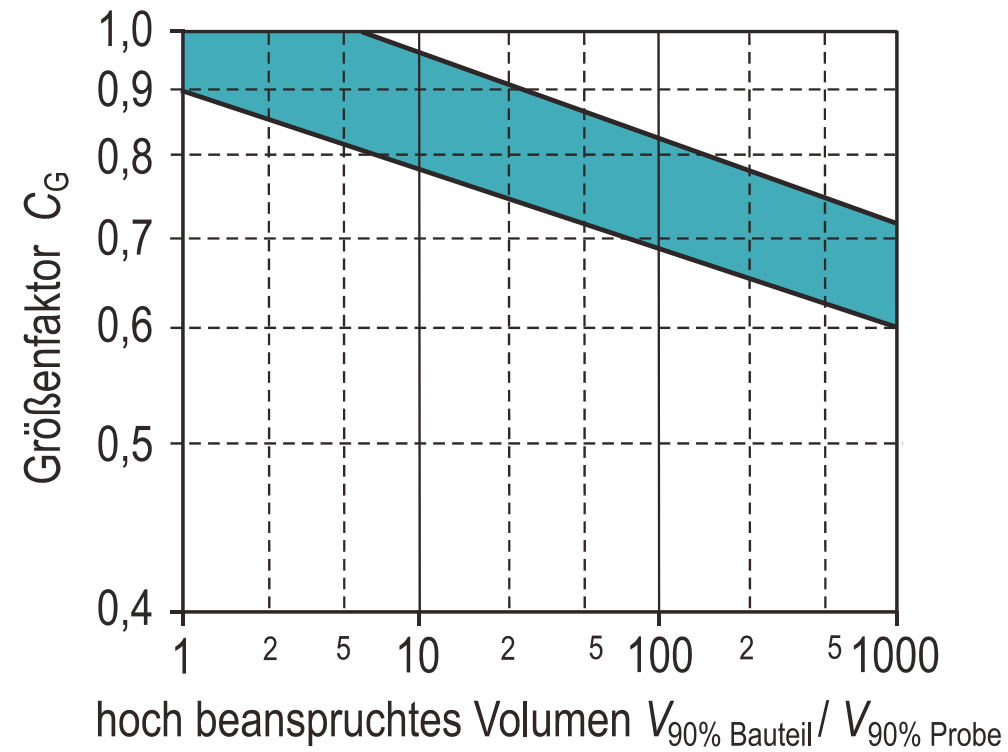
Spannungsmechanischer (geometrischer) Größeneinfluss

Bei inhomogener Spannungsverteilung (z. B. Biegebeanspruchung oder Kerbe) ist für eine Rissinitiierung die Ausdehnung der höchst beanspruchten Werkstoffschicht (z. B. $0,9 \dots 1,0 \cdot \sigma_{\max}$) von Bedeutung. Diese „hoch beanspruchte Schicht“ (bzw. das „hoch beanspruchte Volumen“) hat bei der großen Probe aufgrund ihres flacheren Spannungsgradienten eine größere Ausdehnung ($s_1 > s_2$; gleiche Randspannung vorausgesetzt). Mit zunehmender Größe des hoch beanspruchten Volumens steigt die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Riss auslösenden Fehlstelle.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Abschätzung des Größenfaktors (C_G)



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss der Temperatur

Temperaturfaktor (C_T) in Abhängigkeit der Werkstoffart nach FKM-Richtlinie

Werkstoffart	Temperatur °C ¹⁾	Temperaturfaktor C_T ²⁾
Stähle außer Feinkornbaustähle und nicht rostende Stähle ³⁾	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 100^\circ\text{C})$
Feinkornbaustähle	60 ... 500	$C_T = 1 - 10^{-3} \cdot \vartheta$
Stahlguss	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 100^\circ\text{C})$
Gusseisen mit Lamellengraphit	100 ... 500	$C_T = 1 - (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Gusseisen mit Kugelgraphit	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,6 \cdot (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Temperguss	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,3 \cdot (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Aluminiumwerkstoffe	50 ... 200	$C_T = 1 - 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 50^\circ\text{C})$

¹⁾ Bereich der Gültigkeit des Temperaturfaktors C_T

²⁾ ϑ = Betriebstemperatur in °C

³⁾ Für nicht rostende Stähle sind keine Temperaturfaktoren bekannt

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss des Oberflächenzustandes - Eigenspannungen

Der Zustand der Bauteiloberfläche (bis in eine Tiefe die der technischen Anrissphase entspricht, also etwa 0,5 mm), hat einen starken Einfluss auf die Schwingfestigkeit, da Ermüdungsrisse meist von der Oberfläche bzw. der oberflächennahen Schicht ausgehen.

Mit einer **Verbesserung der Schwingfestigkeit** ist dann zu rechnen, falls durch die Veränderung der Oberflächenschicht **Druckeigenspannungen** erzeugt werden. Hierzu zählen insbesondere die folgenden Verfahren:

- Nitrieren
- Einsatzhärten und Carbonitrieren
- Flamm- und Induktionshärten
- Festwalzen und Kugelstrahlen

In der Praxis können jedoch auch Oberflächenzustände auftreten, die zu einer **Verschlechterung der Schwingfestigkeit** führen. Dies ist immer dann der Fall, falls **Zugeigenspannungen** eingebracht werden. Hierzu zählen die folgenden Verfahren:

- Schmieden
- Gießen
- spanende Bearbeitung (sofern Zugeigenspannungen entstehen)

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Kennzahlen zum Einfluss einer Randschichthärtung

Verfahren	Ungekerbte Probe	Gekerbte Probe	Bemerkungen
Nitrieren Nitrierhärte­tiefe: 0,1 ... 0,4 mm Oberflächen­härte: 700 ... 1000 HV10	1,10 ... 1,15 (1,15 ... 1,25)	1,30 ... 2,00 (1,90 ... 3,00)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen. • Steigerung der Dauerfestigkeit mit zunehmender Nitrierhärte­tiefe erzielbar.
Einsatzhärten Einsatzhärte­ungstiefe: 0,2 ... 0,8 mm Oberflächen­härte: 670 ... 750 HV10	1,10 ... 1,50 (1,20 ... 2,00)	1,20 ... 2,00 (1,50 ... 2,50)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen. • Steigerung der Dauerfestigkeit mit zunehmender Einsatzhärte­ungstiefe erzielbar.
Carbonitrieren Einsatzhärte­ungstiefe: 0,2 ... 0,4 mm Oberflächen­härte: 670 HV10	(1,80)	----	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen durch Austenit-Marten­sit-Umwandlung (Volumenver­größerung) • Achtung: Anrissbildung möglich !
Flamm- und Induktionshärten Einhärte­tiefe: 0,9 ... 1,5 mm Oberflächen­härte: 51 ... 64 HRC	1,20 ... 1,50 (1,30 ... 1,60)	1,50 ... 2,50 (1,60 ... 2,80)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen durch Austenit-Marten­sit-Umwandlung (Volumenver­größerung) • Achtung: Anrissbildung möglich !

¹⁾ Richtwerte, gültig für die Bauteil-Dauerfestigkeit
 Werte ohne Klammern: Probendurchmesser 30 mm ... 40 mm
 Werte in Klammern: Probendurchmesser 8 mm ... 15 mm

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

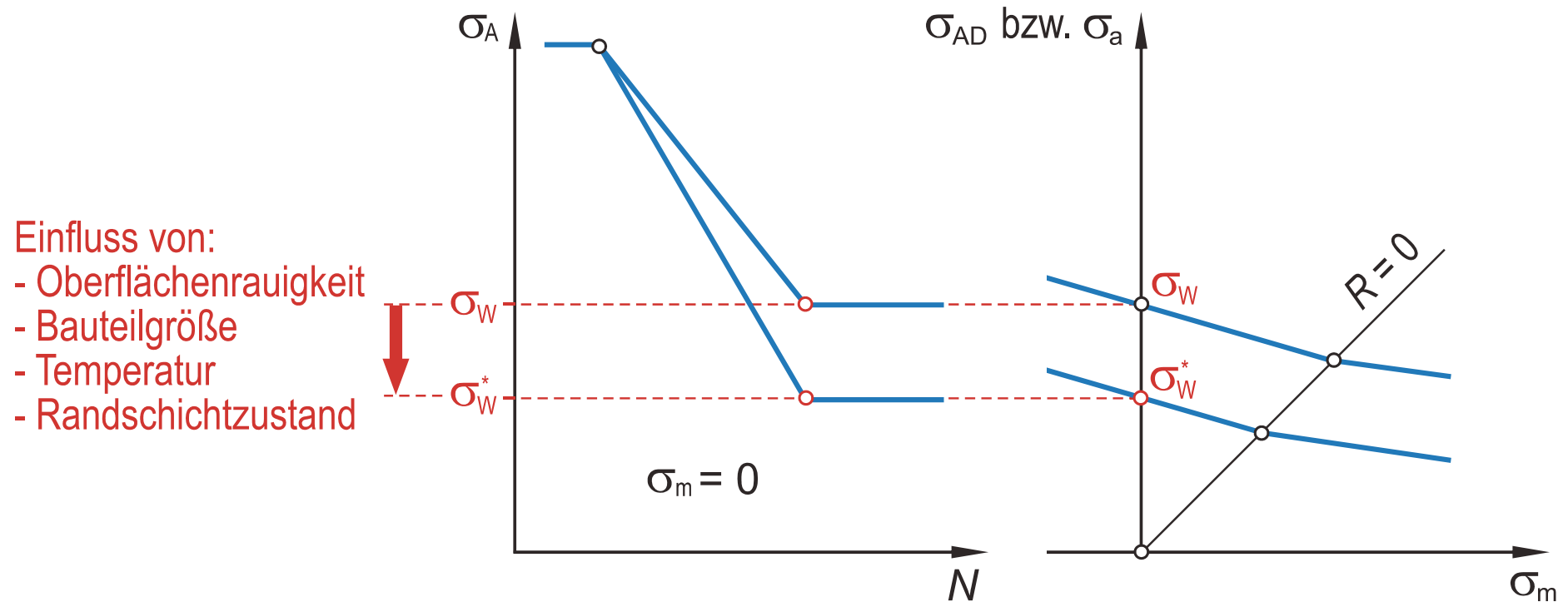
Kennzahlen zum Einfluss einer mechanischen Verfestigung der Bauteiloberfläche

Verfahren	Ungekerbte Probe	Gekerbte Probe	Bemerkungen
Festwalzen	1,10 ... 1,25 (1,20 ... 1,40)	1,30 ... 2,00 (1,90 ... 3,00)	Wirkungsweise: <ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen • Glättung der Oberfläche (Rauigkeit) • Zusammendrücken von Poren • Achtung: Anrissbildung möglich!
Kugelstrahlen	1,10 ... 1,50 (1,20 ... 2,00)	1,20 ... 2,00 (1,50 ... 2,50)	<ul style="list-style-type: none"> • Stahl-, Keramik-, Glaskugeln (0,2 ... 4 mm) • Druckeigenspannungsschicht: 0,02 ... 0,2 mm • Höherfeste Werkstoffe besser geeignet, da Druckeigenspannungszustand dort besser aufgebaut und erhalten wird.

- ¹⁾ Richtwerte, gültig für die Bauteil-Dauerfestigkeit
 Werte ohne Klammern: Probendurchmesser 30 mm ... 40 mm
 Werte in Klammern: Probendurchmesser 8 mm ... 15 mm

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berechnung der korrigierten Wechselfestigkeit



$$\sigma_W^* = \sigma_W \cdot c_O \cdot c_G \cdot c_T \cdot c$$

σ_W Wechselfestigkeit

σ_W^* korrigierte Wechselfestigkeit

c_O Oberflächeneinfluss

c_G Größeneinfluss

c_T Temperatureinfluss

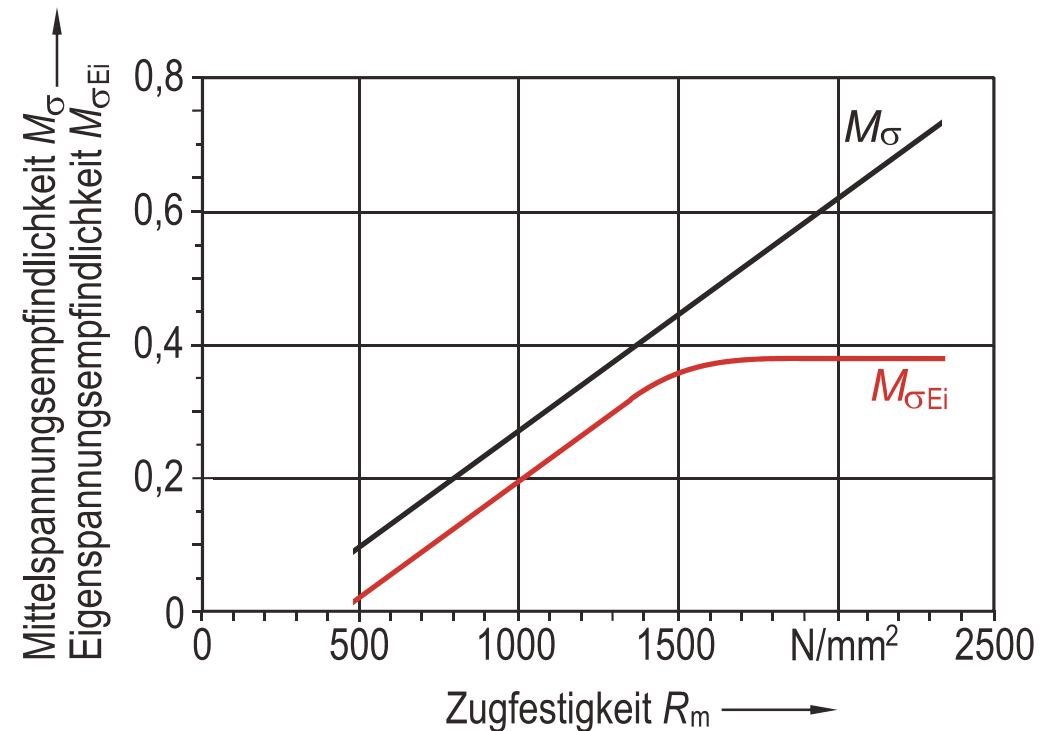
c Weitere Einflüsse

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss von Eigenspannungen

Analog zur Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ nimmt die Eigenspannungsempfindlichkeit $M_{\sigma Ei}$ mit steigender Zugfestigkeit des Werkstoffs zu, da der Abbau von Eigenspannungen mit zunehmender Werkstofffestigkeit erschwert wird.

Die besonders starke Verminderung der Mittelspannungsempfindlichkeit bei hochfesten Stählen ($R_m > 1500 \text{ N/mm}^2$) ist ungeklärt.



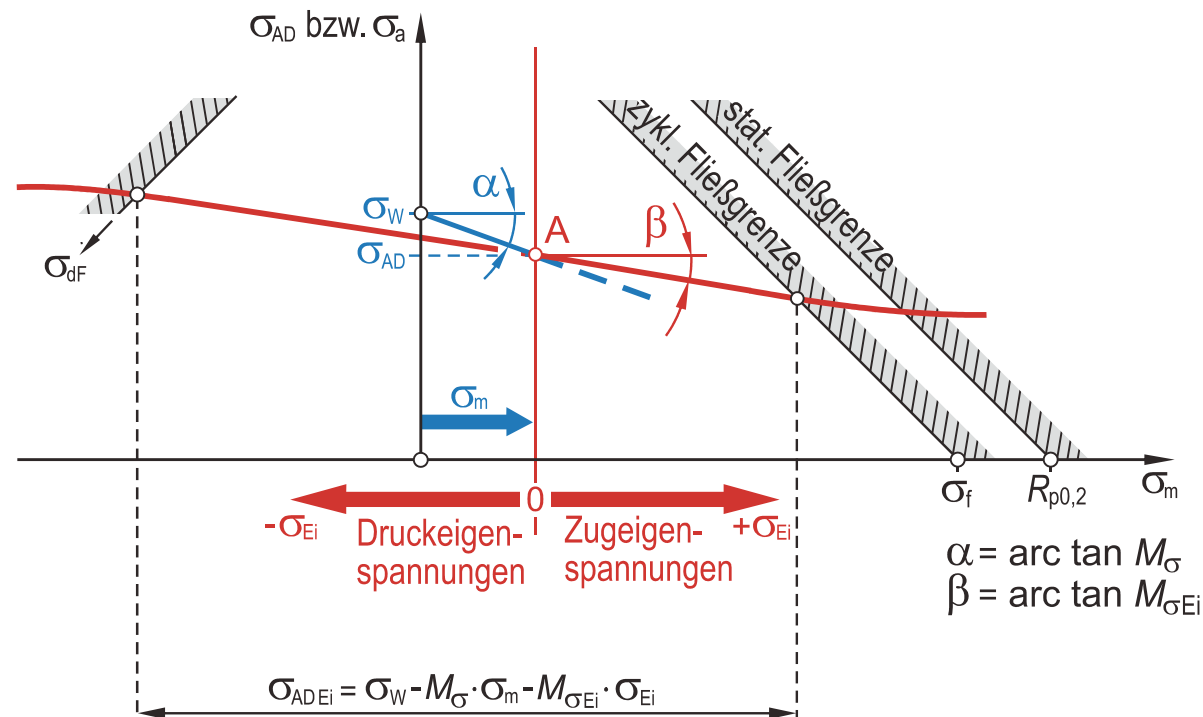
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Liegt eine eigenspannungsbehaftete Schwingbeanspruchung vor, der sich ggf. noch eine Mittelspannung aus der äußeren Belastung überlagert, dann erhält man die dauernd ertragbare Spannungsamplitude (σ_{ADEi}), indem man ausgehend vom Punkt A und unter Berücksichtigung der Eigenspannungsempfindlichkeit $M_{\sigma Ei}$ eine weitere Spannungstransformation durchführt.

Dauernd ertragbare Spannungsamplitude unter Mittel- und Eigenspannungseinfluss

$$\sigma_{ADEi} = \sigma_W - M_{\sigma} \cdot \sigma_m - M_{\sigma Ei} \cdot \sigma_{Ei}$$

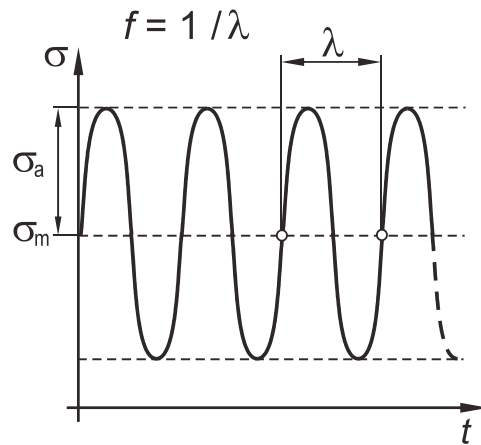
Bei Zugeigenspannungen ist σ_{Ei} positiv und bei Druckeigenspannungen negativ einzusetzen.



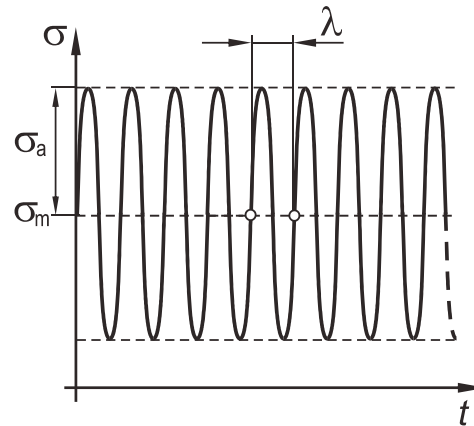
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Frequenzeinfluss

geringe Frequenz



hohe Frequenz



Stahl:

Kein Einfluss der Frequenz auf die Schwingfestigkeit im Bereich von 1 ... 1000 Hz.

Voraussetzung:

- keine Korrosion
- keine erhöhte Temperatur
- keine Beanspruchung bis nahe der Dehngrenze

Aluminium und dessen Legierungen:

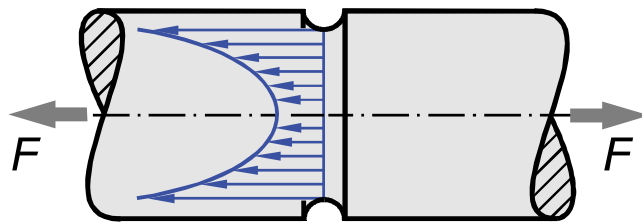
Schwingfestigkeit verbessert sich mit zunehmender Frequenz (solange keine nennenswerte Erwärmung eintritt).

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Einfluss der Konstruktion - Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung

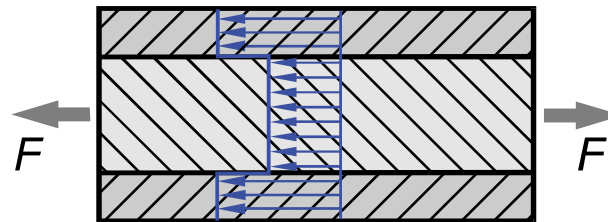
Kerbwirkung: Örtliche Überhöhung der Beanspruchung (z. B. Spannung oder Dehnung) Kerbwirkung vermindert die Schwingfestigkeit teilweise erheblich.

Arten von Kerben



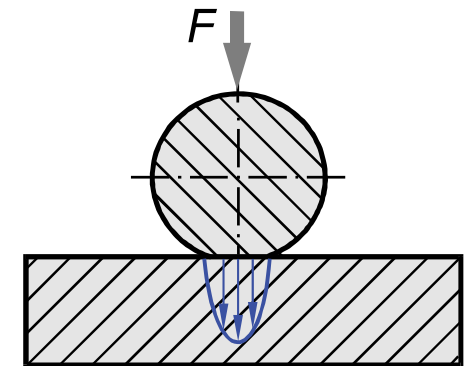
Formkerbe

Formkerben sind konstruktiv oder fertigungstechnisch bedingte, geometrische Unstetigkeiten der Bauteilgeometrie.



Werkstoffkerbe

Werkstoffkerben sind begrenzte Bereiche unterschiedlicher Werkstoffsteifigkeit bzw. Dehngrenze in einem ansonsten homogenen Werkstoff (z. B. Einschlüsse, Randschichten). Die inneren Grenzflächen wirken hierbei wie die freie Kerboberfläche.



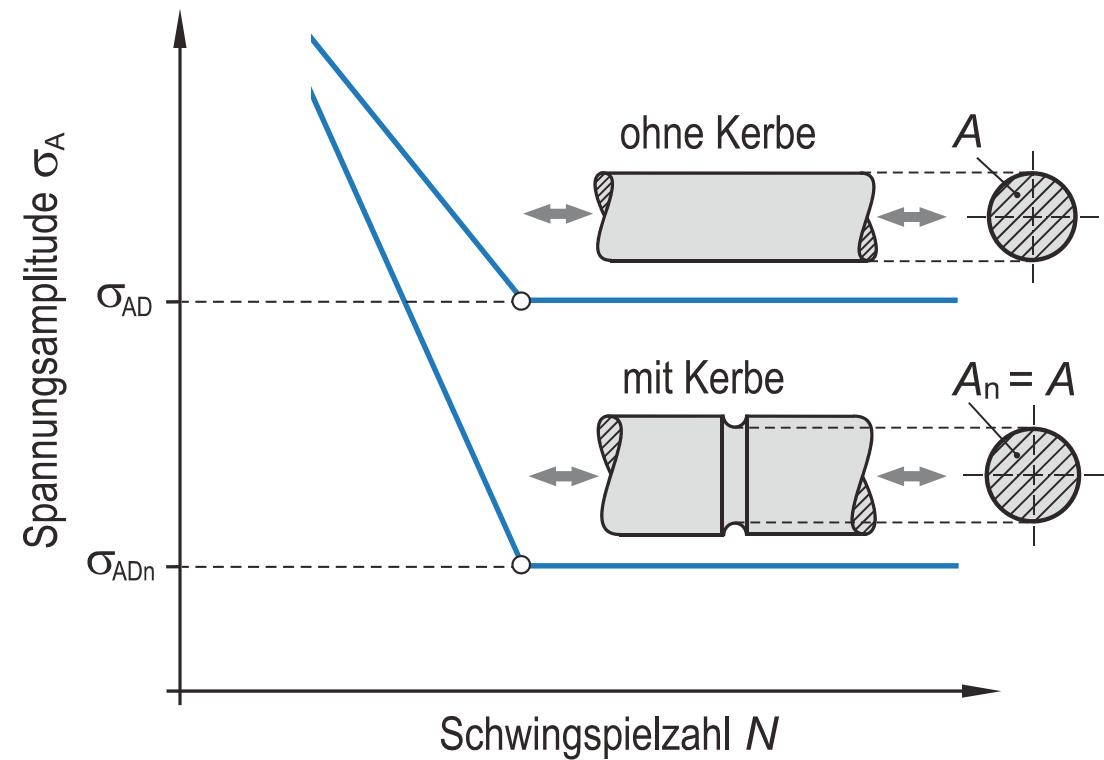
Belastungskerbe

Belastungskernen sind Bereiche örtlicher Überhöhung der Beanspruchung (z. B. Krafteinleitungsstellen, Hertz'sche Pressung).

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Formkerben verschlechtern die Schwingfestigkeit. Das Ausmaß der Verschlechterung wird im Wesentlichen beeinflusst durch:

- Geometrie der Formkerbe
- Art der Beanspruchung

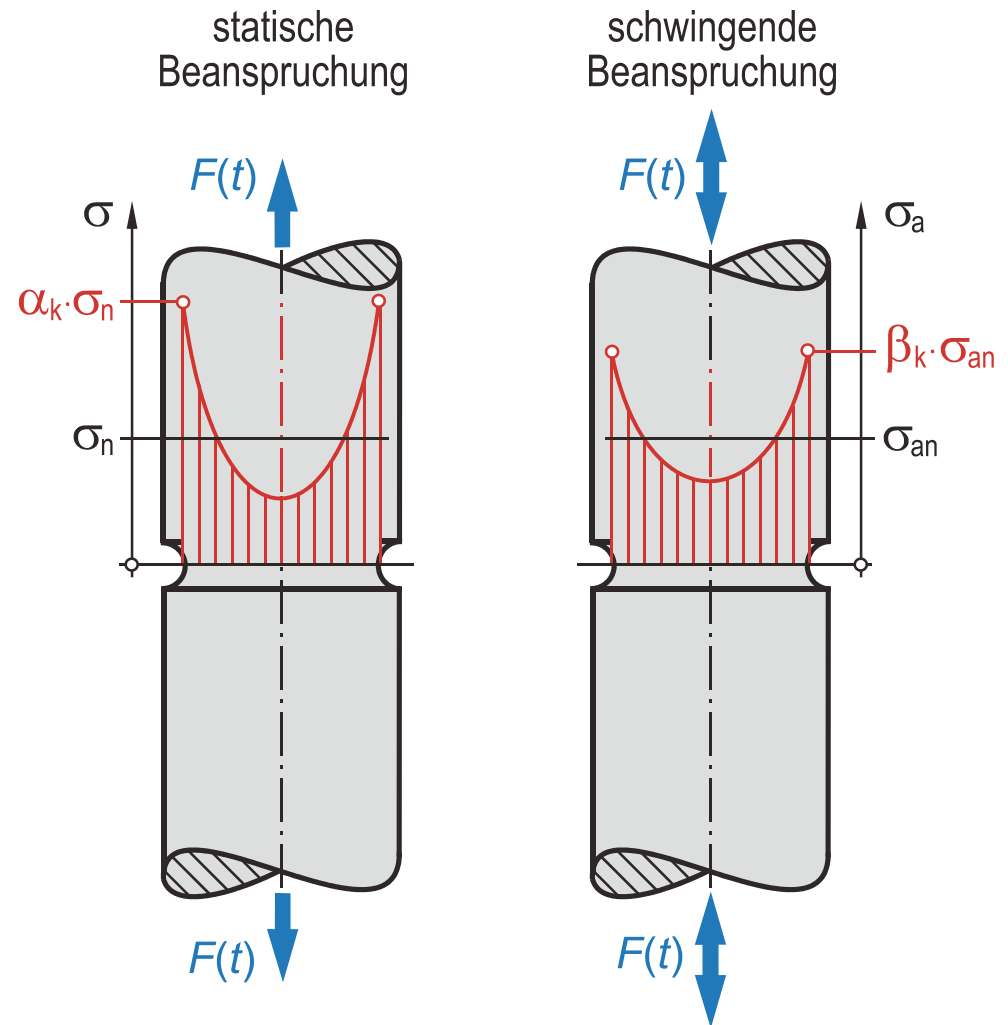


Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass eine gekerbte Probe bzw. ein gekerbtes Bauteil eine höhere Nennspannung ertragen kann, als gemäß der Formzahl α_k zu erwarten wäre, also:

$$\sigma_{an} > \sigma_{AD} / \alpha_k.$$

Aus dieser Beobachtung schließt man, dass die Maximalspannung σ_{amax} bei schwingender Beanspruchung im Gebiet der Dauerfestigkeit nicht mit dem „statischen“ Wert $\sigma_{a\ max} = \alpha_k \cdot \sigma_{an}$, sondern mit einem verminderten Betrag $\sigma_{a\ max} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$ schädigungswirksam wird.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Zur Erfassung der festigkeitsmindernden Auswirkung einer Kerbe bei schwingender Beanspruchung wird die **Kerbwirkungszahl** β_k eingeführt.

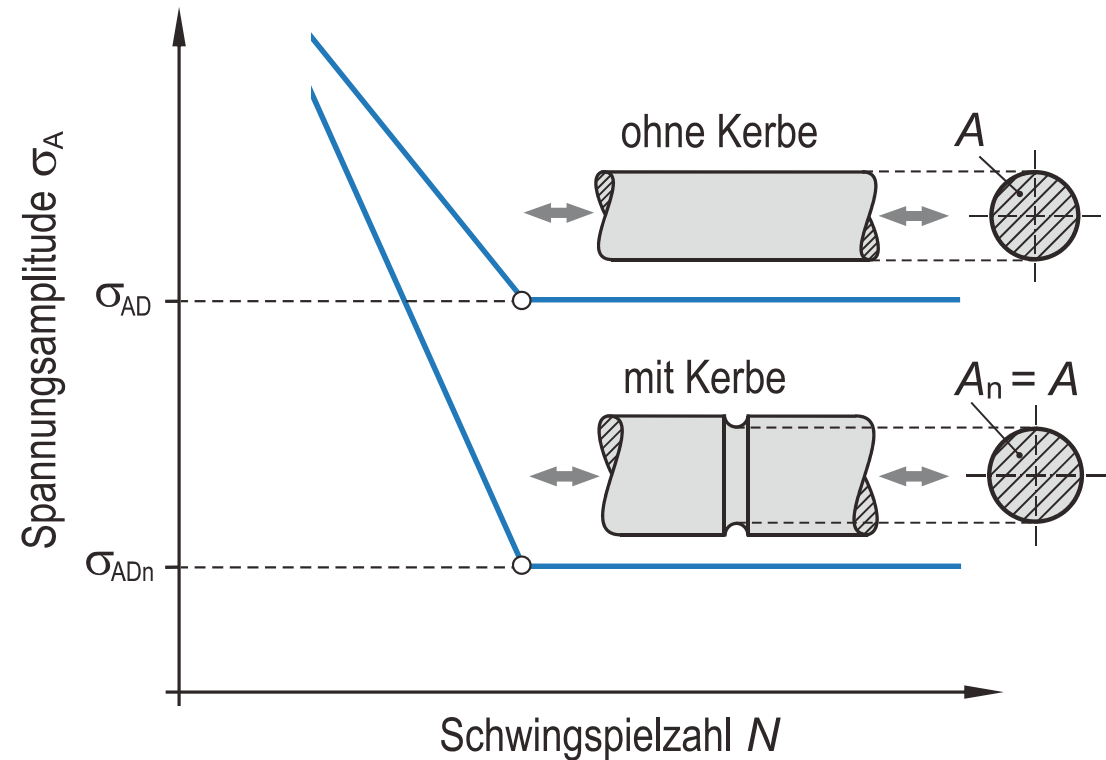
Die Kerbwirkungszahl β_k ist definiert als das Verhältnis der Dauerfestigkeit der ungekerbten, polierten Probe ($\sigma_{AD}(\alpha_k = 1)$) zur Dauerfestigkeit der gekerbten Probe, ausgedrückt durch die Nennspannung ($\sigma_{ADn}(\alpha_k > 1)$).

$$\beta_k = \frac{\sigma_{AD}(\alpha_k = 1)}{\sigma_{ADn}(\alpha_k > 1)}$$

β_k Kerbwirkungszahl

σ_{AD} Dauernd ertragbare Spannungsamplitude der glatten Probe (Bauteil)

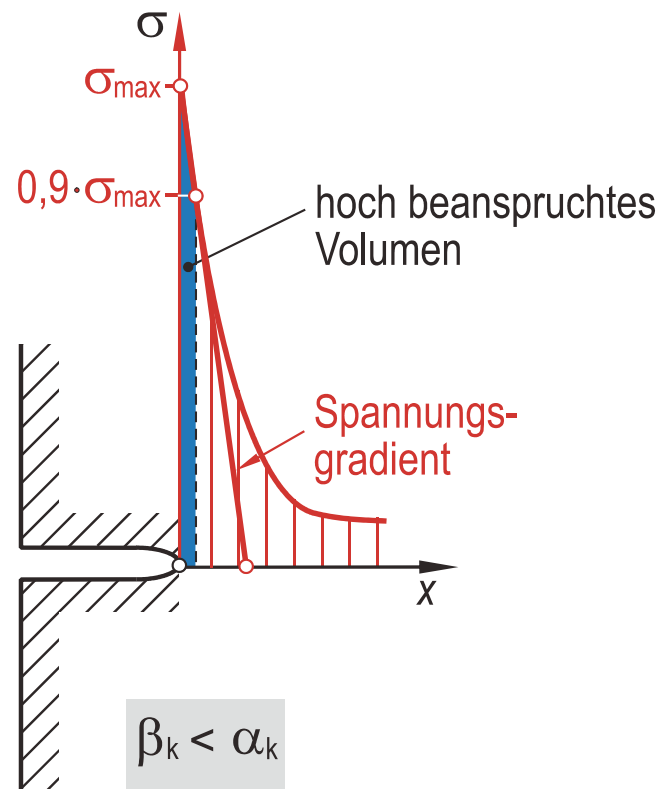
σ_{ADn} Dauernd ertragbare Nennspannungsamplitude der gekerbten Probe (Bauteil)



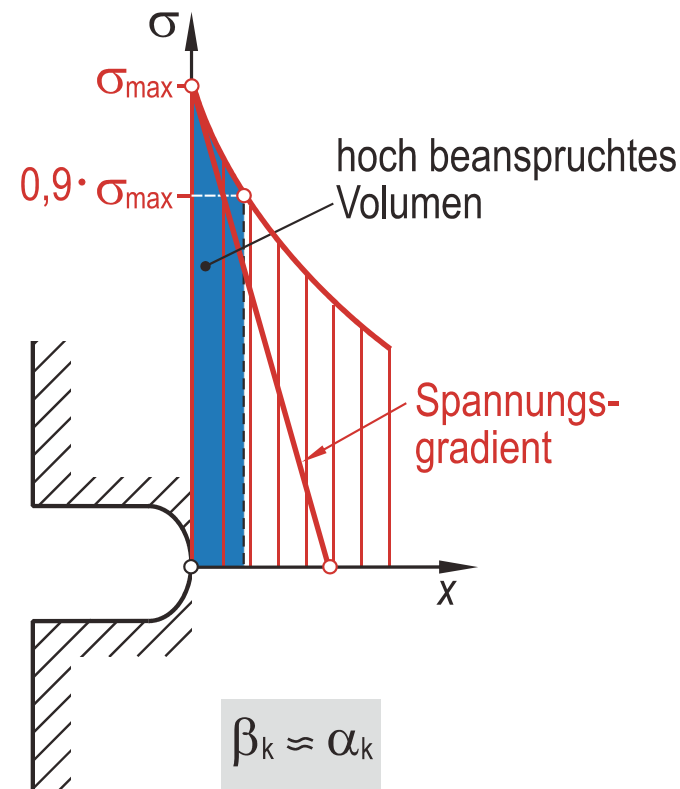
Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Bei duktilen Werkstoffen ist die Kerbwirkungszahl β_k stets kleiner als die elastische Formzahl α_k . Während die Formzahl α_k mit abnehmendem Kerbradius gegen unendlich geht, übersteigt die Kerbwirkungszahl einen Betrag von $\beta_k \approx 6$ nur selten. Die Kerbe wirkt also weniger stark mindernd auf die Dauerfestigkeit als dies durch die Formzahl α_k zu erwarten wäre.

scharfe Kerbe



milde Kerbe



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Erklärung: Bei scharfen Kerben und dementsprechend hohen Spannungsgradienten ist das hoch beanspruchte Volumen im Kerbgrund geringer im Vergleich zu milden Kerben (siehe spannungsmechanischer Größeneinfluss). Dementsprechend ist eine Rissinitiierung bei der mild gekerbten Probe wahrscheinlicher.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berechnungsverfahren für die Kerbwirkungszahl nach dem Spannungsgradientenansatz

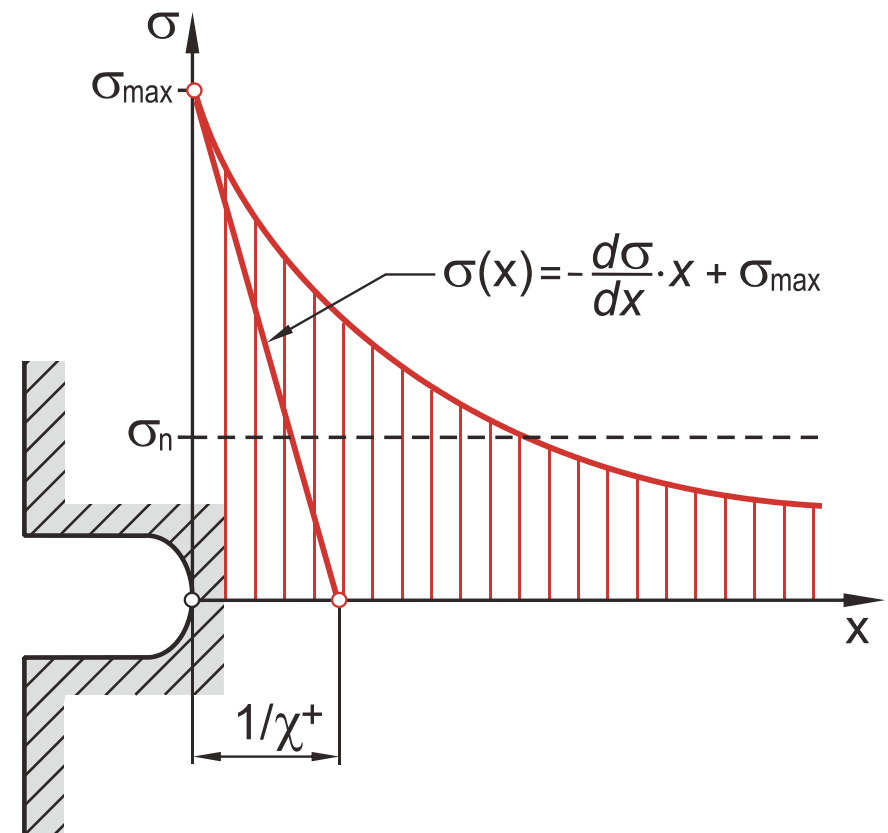
Eine weit verbreitete empirische Methode zur Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_k stellt der **Spannungsgradientenansatz nach Siebel, Meuth und Stieler** dar.

1. Schritt: Berechnung des (bezogenen) Spannungsgradienten χ^+

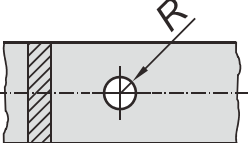
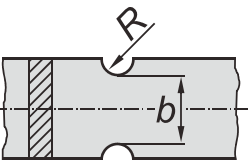
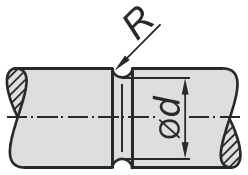
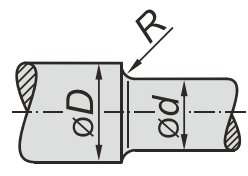
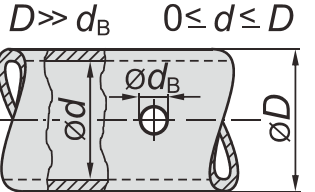
$$\chi^+ = \frac{1}{\sigma_{\max}} \cdot \frac{d\sigma}{dx}$$

Zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgradienten stehen verschiedene Möglichkeiten zu Verfügung:

- Für einfache Geometrien: Elementare Gleichungen (siehe nachfolgende Folie)
- Für komplexe Geometrien: Methode der Finiten Elemente (FEM-Analyse) oder experimentelle Spannungsanalyse mit Hilfe von Dehnmessstreifen.



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Kerbgeometrie	Beanspruchungsart	χ^+ 1/mm
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{b} + \frac{2}{R}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{d} + \frac{2}{R}$
	Torsion	$\frac{2}{d} + \frac{1}{R}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{4}{D+d} + \frac{2}{R}$
	Torsion	$\frac{4}{D+d} + \frac{1}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{D} + \frac{8}{d_B}$
	Torsion	$\frac{2}{D} + \frac{6}{d_B}$

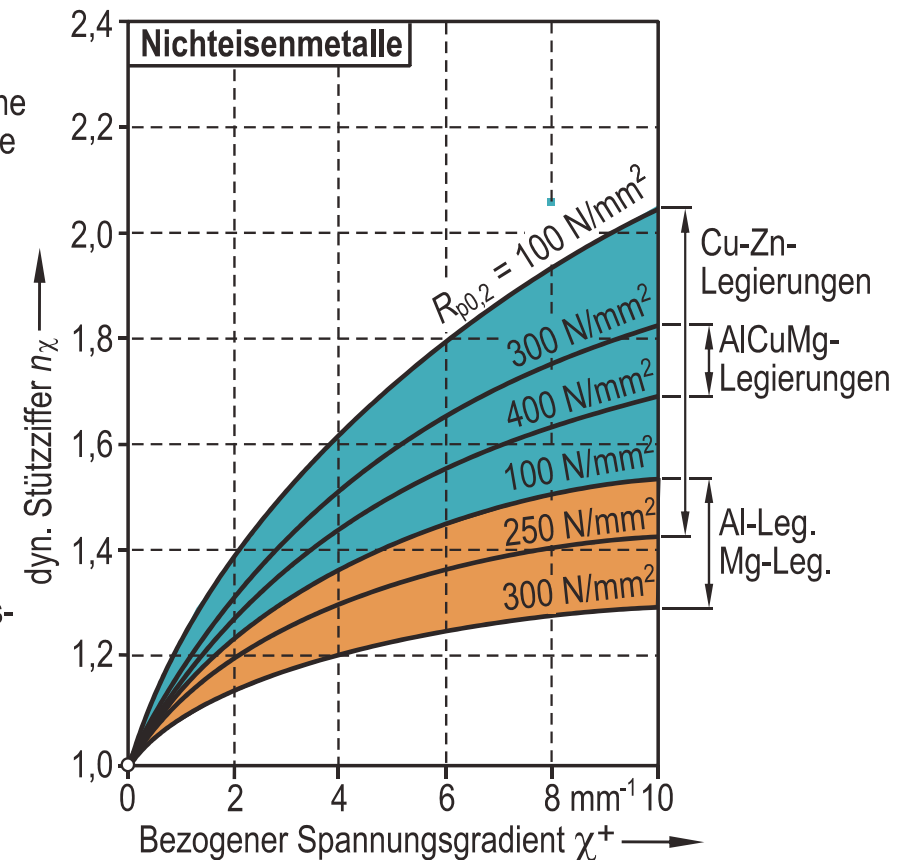
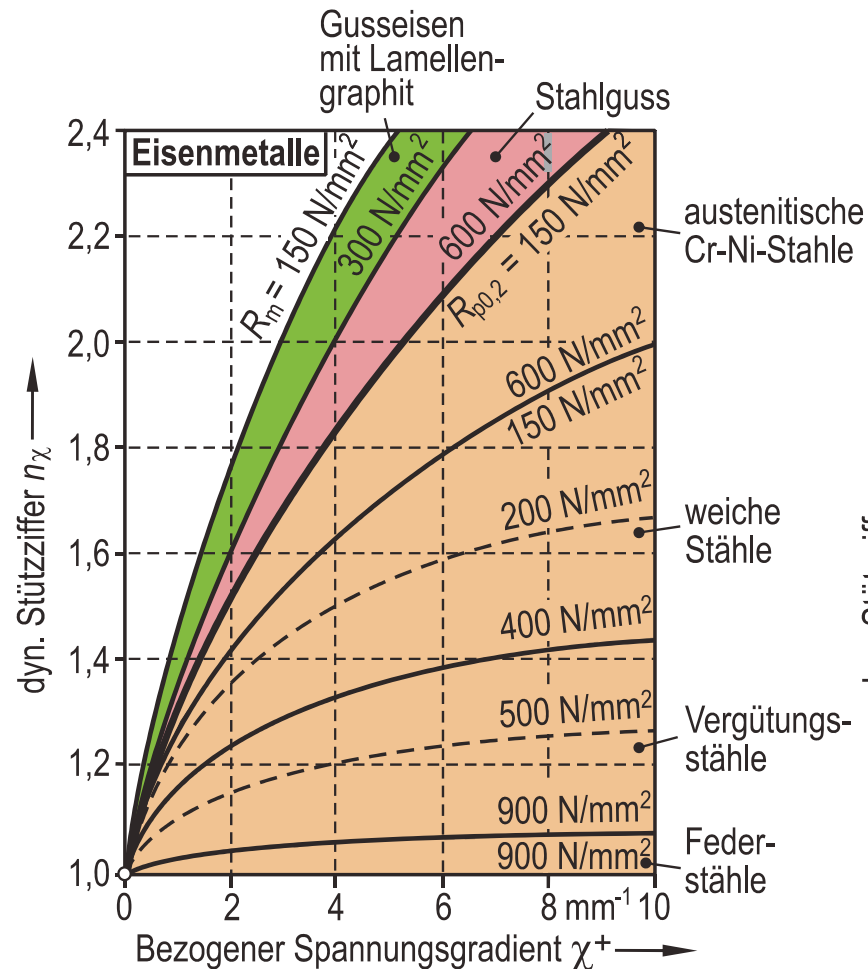
Berechnungsformeln für das bezogene Spannungsgefälle für einfache Bauteilgeometrien.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

2. Schritt: Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ

Die Ausbreitung eines Schwingrisses wird wirksam verzögert, durch:

- zunehmender Spannungsgradient χ^+
- abnehmende Werkstofffestigkeit



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Eine Besonderheit stellt das Gusseisen mit Lamellengraphit dar. Es hat aufgrund seiner Graphitform eine hohe **innere Kerbwirkung**, d. h. eine äußere Formkerbe wirkt sich kaum mehr auf die Schwingfestigkeit aus. Die Kerbwirkungszahl β_k unterscheidet sich dementsprechend sehr stark von der Formzahl α_k .

Ergibt sich für die dynamische Stützziffer n_χ ein Wert nahe 1,0 (z. B. hochfeste Stähle), dann liegt eine **volle Kerbempfindlichkeit** bei Schwingbeanspruchung vor, während ein hoher Wert für n_χ ($n_\chi \approx \alpha_k$) eine **weitgehende Kerbunempfindlichkeit** bedeutet (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit).

3. Schritt: Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi}$$

β_k Kerbwirkungszahl

α_k Formzahl

n_χ dynamische Stützziffer

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berechnungsverfahren für die Kerbwirkungszahl mittels Näherungsgleichung

$$n_x = 1 + \left(\frac{c_1}{K} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{c_2}{R}} \quad (\text{nach Dietmann})$$

- n_x dynamische Stützziffer (dimensionslos)
 K Konstante (Werkstoffkennwert), siehe Tabelle
 c_1 Konstante (siehe Tabelle)
 c_2 Konstante für die Beanspruchungsart (mm)
 $c_2 = 2$ für Zug-Druck- oder Biegebeanspruchung
 $c_2 = 1$ für Torsion oder Schubbeanspruchung
 R Kerbradius (mm)
 m Exponent (dimensionslos)

Werkstoffart	c_1 N/mm ²	K N/mm ²	m
Ferritisch-perlitische Stähle	55	$R_{p0,2}$	1,00
Austenitische Stähle	28	$R_{p0,2}$	0,45
Gusseisen mit Lamellengraphit und Stahlguss	12	R_m	0,20

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Aufgabe 13.5



Ein einseitig eingespannter Rundstab mit Vollkreisquerschnitt ($d = 25 \text{ mm}$) und einer Länge von $l = 500 \text{ mm}$ aus der legierten Vergütungsstahlsorte 37Cr4 kann auf unterschiedliche Weise beansprucht werden.

Die Oberfläche des Rundstabes ist gedreht ($R_z = 12,5 \text{ }\mu\text{m}$). Kerbwirkung an der Einspannstelle, Schubspannungen durch Querkräfte (Aufgabenteil b) sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit dürfen vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 37Cr4:

$$R_{p0,2} = 820 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

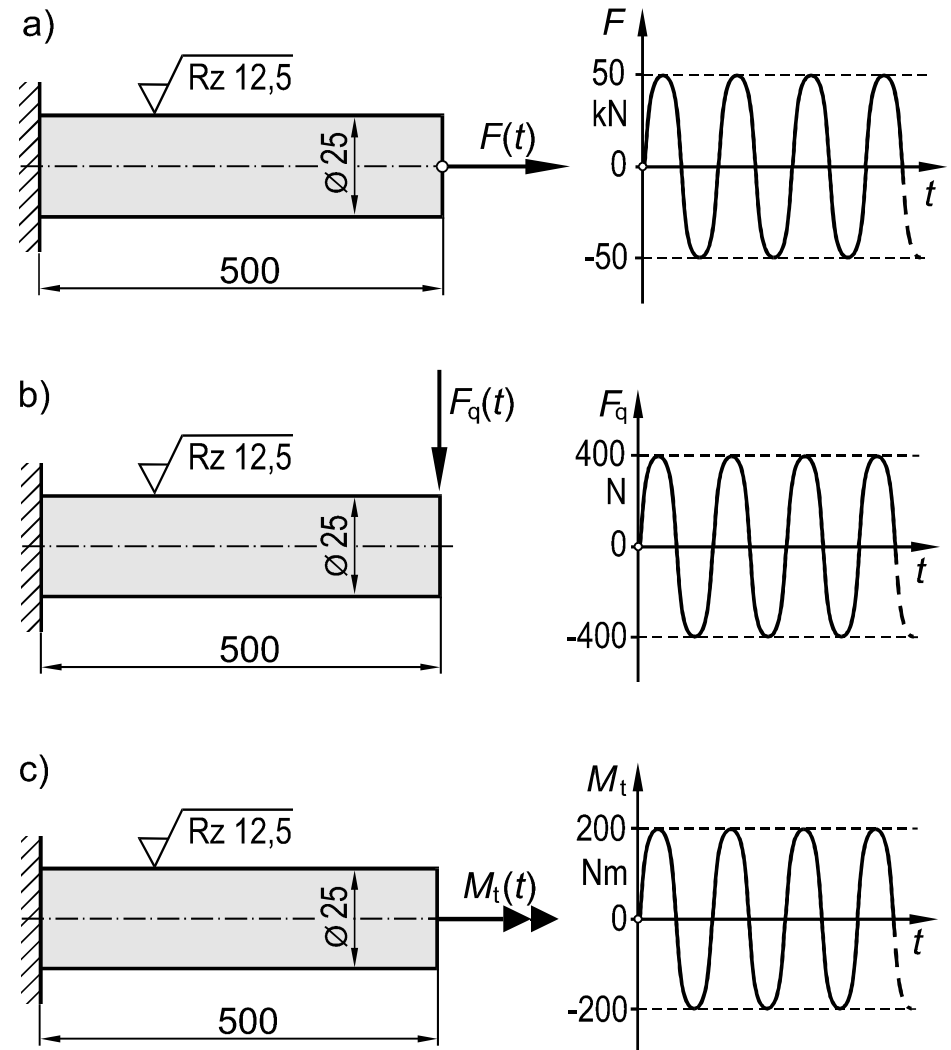
$$\sigma_{zdW} = 415 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bW} = 480 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tW} = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D) für die nachfolgenden Lastfälle.

- a) Rein wechselnde Zugkraft F .
- b) Rein wechselnde Querkraft F_q .
- c) Rein wechselndes Torsionsmoment M_t .

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Aufgabe 13.8



Ein einseitig eingespannter Freiträger ($l = 200 \text{ mm}$) mit rechteckiger Querschnittsfläche ($a = 25 \text{ mm}$; $b = 50 \text{ mm}$) aus der Gusseisensorte EN-GJL-350 wird durch die statisch wirkende Kraft $F_1 = 120 \text{ kN}$ sowie durch die zeitlich veränderliche, rein wechselnd wirkende Kraft F_2 beansprucht. Die Oberflächenrauigkeit des Stabes kann mit $Rz = 200 \text{ }\mu\text{m}$ angenommen werden.

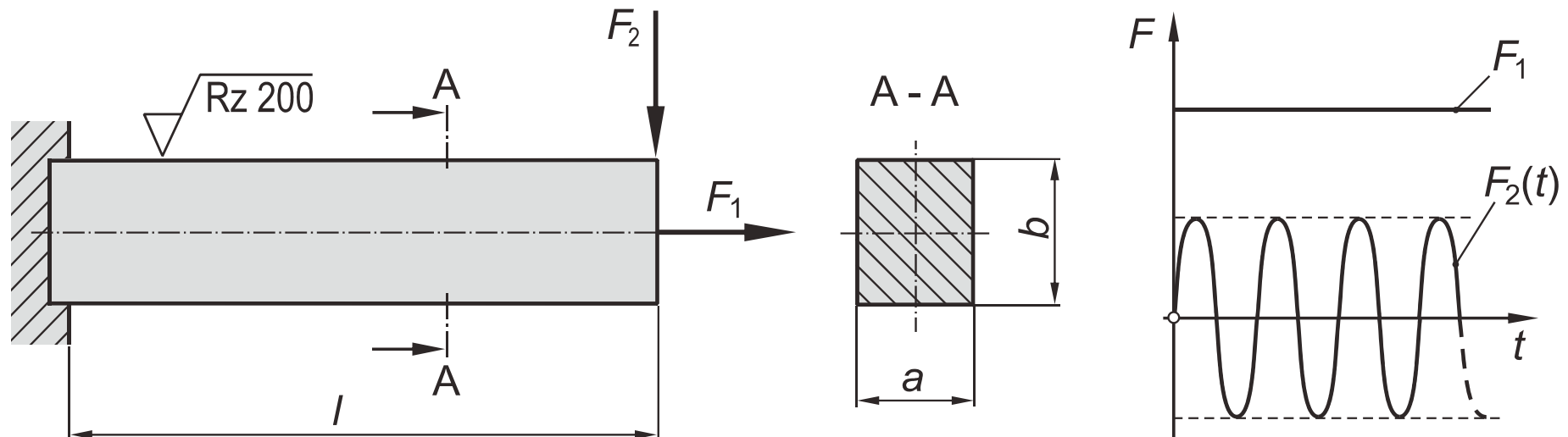
Werkstoffkennwerte EN-GJL-350:

$$R_m = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bW} = 130 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 108000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_2 damit kein Dauerbruch eintritt. Es wird eine Sicherheit von $S_D = 5,0$ gefordert.

Kerbwirkung an der Einspannstelle, Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit dürfen vernachlässigt werden.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

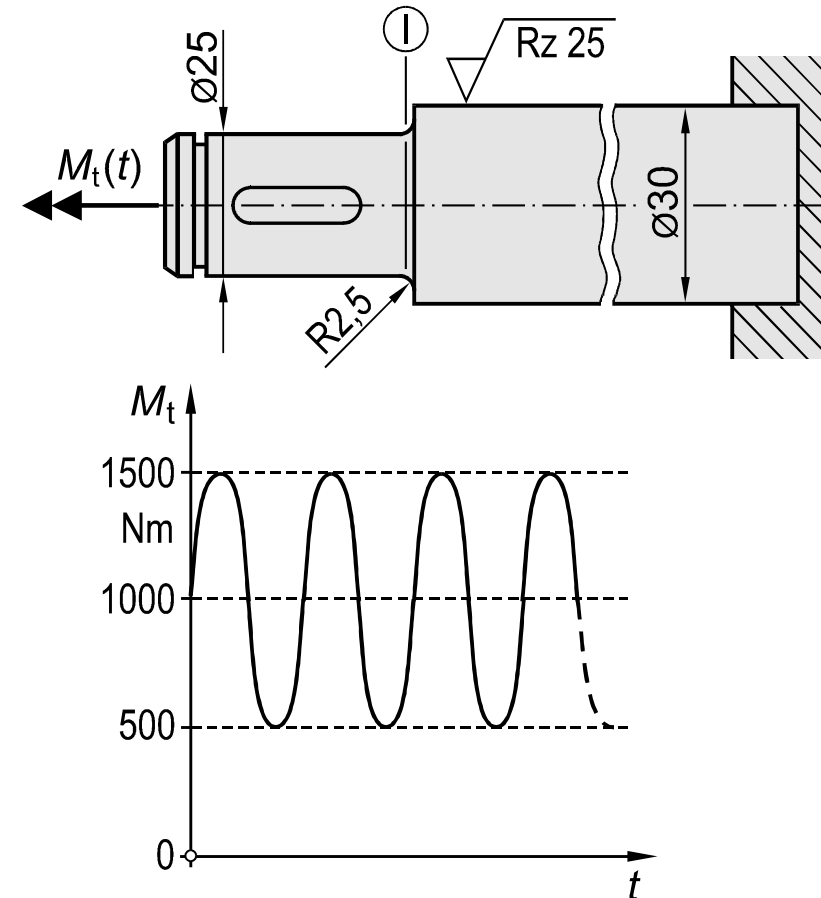
Aufgabe 13.9

Eine statisch vorgespannte, abgesetzte Torsionsfeder mit gedrehter Oberfläche ($R_z = 25 \mu\text{m}$) aus der Federstahlsorte 61SiCr7 wird im Betrieb durch ein zeitlich veränderliches Torsionsmoment beansprucht (siehe Abbildung). Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte 61SiCr7:

$$\begin{aligned} R_{p0,2} &= 1400 \text{ N/mm}^2 \\ R_m &= 1830 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{tW} &= 490 \text{ N/mm}^2 \\ E &= 211000 \text{ N/mm}^2 \\ \mu &= 0,30 \end{aligned}$$

Hat die Torsionsfeder im Bereich des Absatzes (Querschnitt I) eine ausreichende Sicherheit gegenüber Dauerbruch?



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Aufgabe 13.14



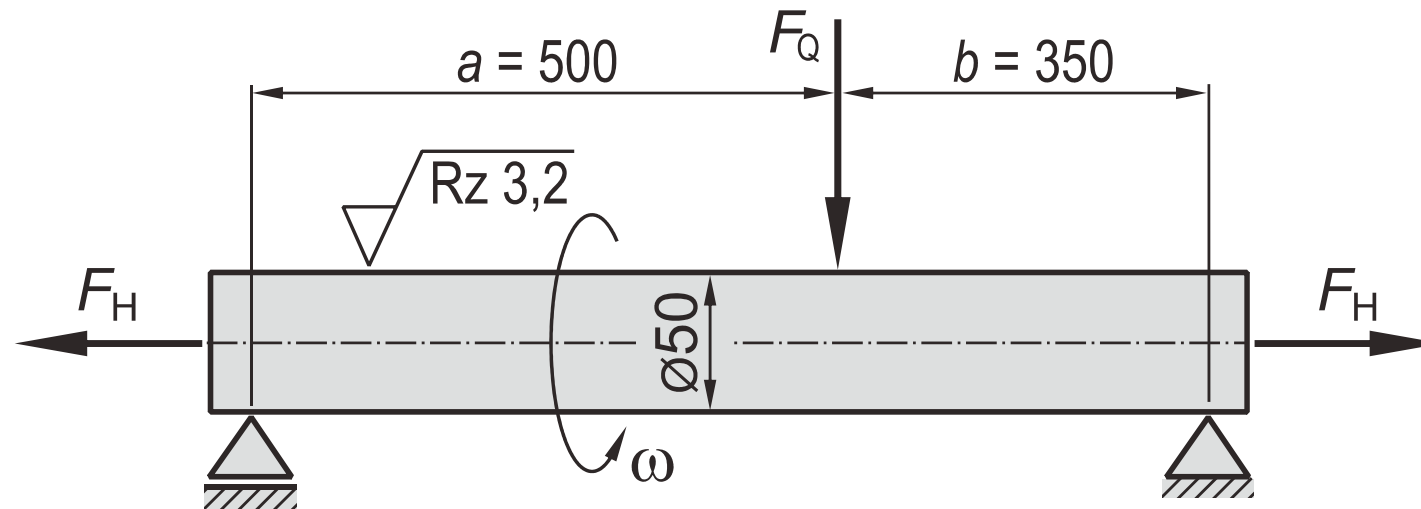
Ein Welle mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte 42CrMo4 mit geschliffener Oberfläche ($R_z = 3,2 \mu\text{m}$) und einem Durchmesser von $d = 50 \text{ mm}$ ist im Betrieb durch die statisch wirkende, außermittig angreifende Querkraft $F_Q = 10 \text{ kN}$ beansprucht. Weiterhin kann eine horizontale Zugkraft F_H auftreten. Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit können vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 980 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1070 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bW} = 530 \text{ N/mm}^2$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

- a) Skizzieren Sie den Beanspruchungs-Zeit-Verlauf für die höchst beanspruchte Stelle bei umlaufender Welle. Berechnen Sie außerdem die maximale Spannungsamplitude. Die horizontale Zugkraft F_H wirkt zunächst nicht ($F_H = 0$).
- b) Überprüfen Sie, ob die Welle dauerfest ist, falls ein Sicherheitsfaktor gegen Dauerbruch (S_D) von mindestens 3,50 gefordert wird ($F_H = 0$).
- c) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D), falls die umlaufende Welle zusätzlich mit einer horizontalen Zugkraft von $F_H = 350$ kN vorgespannt ist.

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Aufgabe 13.21



Eine an beiden Enden gelagerte, umlaufende Antriebswelle aus der legierten Vergütungsstahl-sorte 36NiCrMo16 ($D = 100 \text{ mm}$; $a = 1000 \text{ mm}$) wird im Betrieb durch die statisch wirkenden Kräfte $F_1 = 70 \text{ kN}$ und $F_2 = 480 \text{ kN}$ belastet (siehe Abbildung). Die Welle hat eine gedrehte Oberfläche ($R_z = 25 \text{ }\mu\text{m}$). Die Querbohrung sei zunächst (Aufgabenteile a und b) nicht vorhanden. Schubspannungen durch Querkkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte 36NiCrMo16:

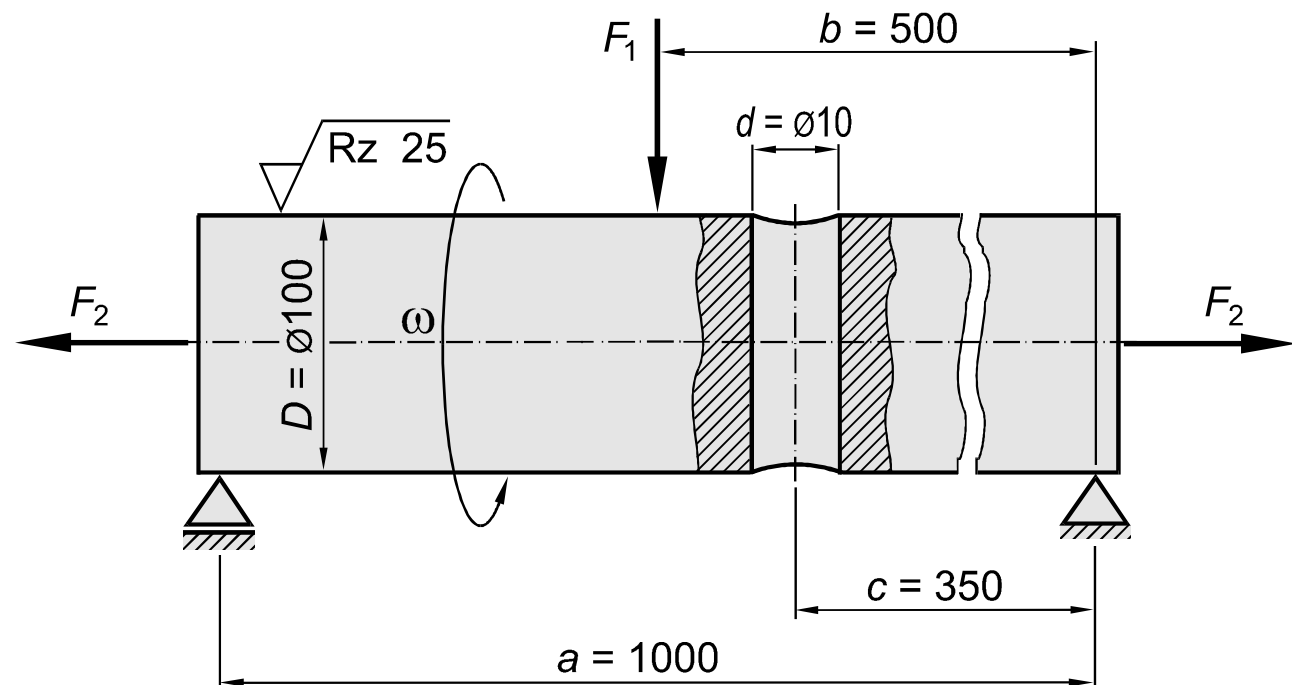
$$R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1420 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bW} = 710 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 211000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

- a) Skizzieren Sie quantitativ den zeitlichen Verlauf der Spannung an der höchst beanspruchten Stelle (umlaufende Welle).
- b) Berechnen Sie die Sicherheiten gegen Fließen und gegen Dauerbruch für die umlaufende Welle. Sind die Sicherheiten ausreichend?

Für eine Konstruktionsvariante erhält die Welle eine Querbohrung ($d = 10 \text{ mm}$) an der in der Abbildung dargestellten Stelle. Die beiden Kräfte $F_1 = 70 \text{ kN}$ und $F_2 = 480 \text{ kN}$ bleiben unverändert.

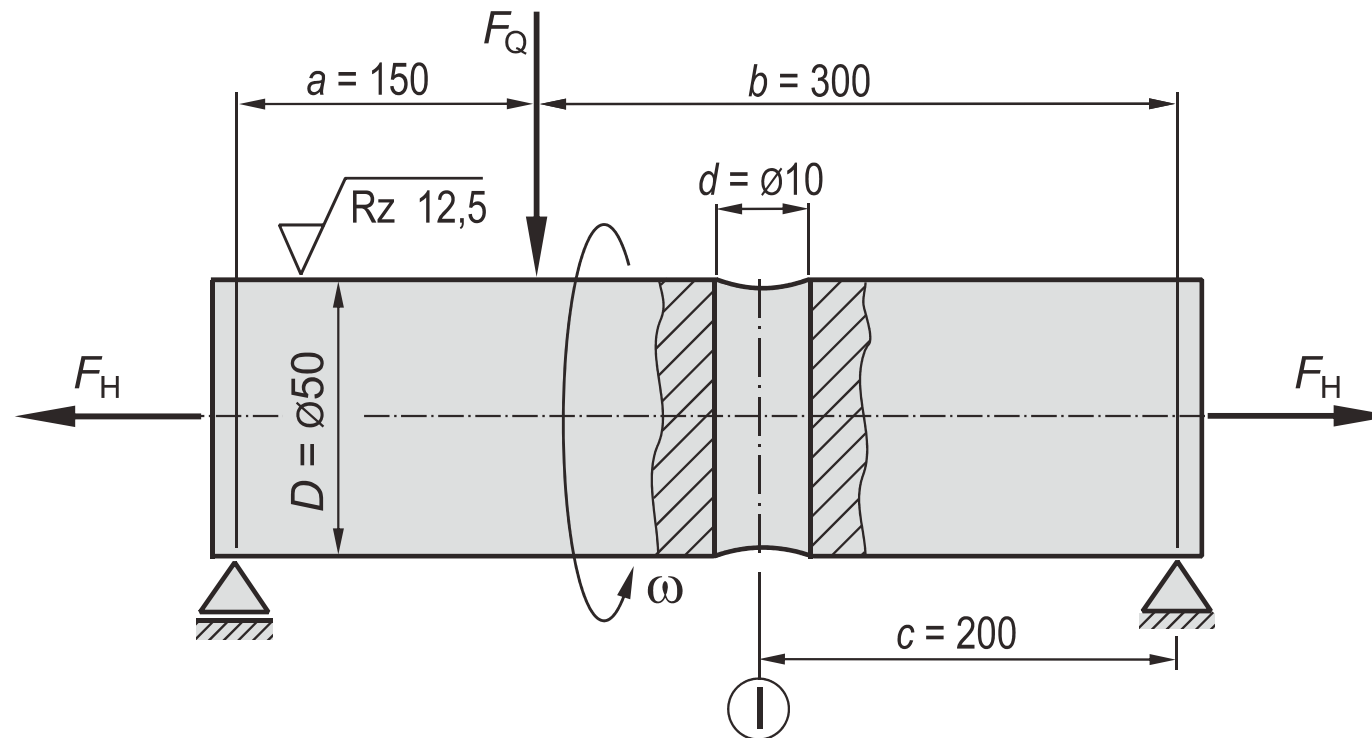
- c) Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} für die Welle mit Querbohrung.
- d) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D) an der höchst beanspruchten Stelle. Ist die Sicherheit ausreichend?

Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Aufgabe 13.26



Die Abbildung zeigt eine umlaufende Antriebswelle ($\varnothing 50$ mm) mit Querbohrung ($\varnothing 10$ mm) aus Werkstoff 34CrMo4. Die Welle hat eine gedrehte Oberfläche ($R_z = 12,5 \mu\text{m}$). Es soll überprüft werden, ob die Antriebswelle gegenüber unzulässiger plastischer Verformung und gegenüber Dauerbruch ausreichend dimensioniert ist. Während des Betriebs (umlaufende Welle) wirken die Kräfte $F_Q = 15$ kN und $F_H = 250$ kN (siehe Abbildung).



Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

Werkstoffkennwerte 34CrMo4:

$$R_{p0,2} = 820 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bW} = 520 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Berechnen Sie für die Kerbstelle I (Querbohrung) die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend?
- b) Berechnen Sie für die Kerbstelle I (Querbohrung) die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend? Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit sowie Schubspannungen durch Querkräfte müssen nicht berücksichtigt zu werden.
- c) Ermitteln Sie die Querkraft F_{Q1} , damit bei einer gleich bleibenden Zugkraft von $F_H = 250 \text{ kN}$ kein Fließen an der Kerbstelle eintritt (stillstehende Welle in der dargestellten Lage).
- d) Bestimmen Sie die Zugkraft F_{H1} , damit bei einer gleich bleibenden Querkraft von $F_Q = 15 \text{ kN}$ kein Fließen an der Kerbstelle eintritt (stillstehende Welle in der dargestellten Lage).